JAK DOTĄD TŁUMACZONO ZASADY RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I JAK W DZISIEJSZYM STANIE MATEMATYKI NALEŻY JE TŁUMACZYĆ.

ROZPRAWA

IGNACEGO DOMEYKI

W CELU PUBLICZNEGO BRONIENIA DLA OTRZYMANIA STOPNIA MAGISTRA FILOZOFJI, DO ODDZIAŁU NAUK FIZYCZNYCH I MATEMATYCZNYCH PODANA D. 30 MAJA 1822 ROKU

Z AUTOGRAFU
WYDAŁ
S. DICKSTEIN

WARSZAWA :: :: :: :: :: :: :: ROK 1921
DRUKARNIA TECHNICZNA, CZACKIEGO 3 – 5.

JAK DOTĄD TŁUMACZONO

ZASADY RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO

I JAK W DZISIEJSZYM STANIE MATEMATYKI

NALEŻY JE TŁUMACZYĆ.

JAK DOTĄD TŁUMACZONO ZASADY RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I JAK W DZISIEJSZYM STANIE MATEMATYKI NALEŻY JE TŁUMACZYĆ.

ROZPRAWA

IGNACEGO DOMEYKI

W CELU PUBLICZNEGO BRONIENIA DLA OTRZYMANIA STOPNIA MAGISTRA FILOZOFJI, DO ODDZIAŁU NAUK FIZYCZNYCH I MATEMATYCZNYCH PODANA D. 30 MAJA 1822 ROKU

Z AUTOGRAFU
WYDAŁ
S. DICKSTEIN

WARSZAWA :: :: :: :: :: :: :: ROK 1921
DRUKARNIA TECHNICZNA, CZACKIEGO 3—5.

OSOBNE ODBICIE Z TOMU XXV
WIADOMOŚCI MATEMATYCZNYCH.

IGNACY DOMEYKO.

Jak dotąd tłumaczono zasady Rachnnku różniczkowego i jak w dzisiejszym stanie Matematyki należy je tłumaczyć.

Przedmowa Wydawcy.

Napisana w r. 1822 w celu pozyskania stopnia Magistra filozofji w Uniwersytecie Wileńskim rozprawa Ignacego Domeyki, dotycząca zagadnienia o zasadach Rachunku różniczkowego, jakkolwiek dziś, po stu latach, nie wnosi, oczywiście, nowych wiadomości do historji tego zagadnienia, stanowi wszakże, jak sądzimy, przyczynek interesujący do biografji jej autora i do dziejów Uniwersytetu Wileńskiego. Wykazuje bowiem z jednej strony cechę umysłowości Domeyki, nieznaną, o ile nam wiadomo, jego biografom, z drugiej zaś, daje nowe świadectwo o poważnych zajęciach ówczesnej młodzieży wileńskiej w dziedzinie nauk ścisłych. Z tego to powodu mniemam, że ogłoszenie drukiem pracy młodzieńczej jednego z najuczeńszych wychowańców Wszechnicy wileńskiej zaciekawić może czytelników, interesujących się dziejami umysłowości, w szczególności zaś historją Matematyki w Polsce.

Ignacy Domeyko (ur. 23 sierpnia 1801, zmarły 28 stycznia 1879) [1]), był od roku 1816 słuchaczem Oddziału nauk fizycznych i matematycznych Uniwersytetu Wileńskiego, który ukończył ze

[1]) Ob. życiorys Domeyki, w dziele Józefa Bielińskiego. „Uniwersytet Wileński", tom III, str. 389–394.

stopniem Magistra w r. 1822. W czasie jego pobytu w Uniwersytecie wykładali Matematykę profesorowie: Życki, Niemczewski, Wyrwicz, Poliński, Twardowski; Fizykę: Drzewiński; Astronomję: Wyrwicz, Szahin; Chemję: Jędrzej Śniadecki, Mineralogję: Horodecki. Jan Śniadecki, astronom-obserwator-wykładów w Uniwersytecie nie prowadził, ale wpływ jego widoczny był we wszystkich dziedzinach życia uniwersyteckiego. Czyje wykłady obudziły w młodym Domeyce zamiłowanie do nauk matematycznych[1]), oraz który z profesorów zachęcił go do opracowania obranego na rozprawę magistrowską tematu, dla braku źródeł, domyślać się tylko możemy.

Treść rozprawy wskazuje wyraźnie jej tytuł i spis rzeczy, podany przez autora. Obrany temat, dotyczący podstaw Rachunku różniczkowego, albo—jak mówiono—„metafizyki“ tego Rachunku był na porządku dziennym ówczesnych badań. Od czasów twórców tej nauki, Leibniza i Newtona, najznakomitsi uczeni zastanawiali się nad istotą Rachunku różniczkowego i nad trudnościami, tkwiącemi w pojęciu nieskończonostek Leibniza, fluksyj Newtona, w pojęciu granicy i t. d. W czasach bliskich roku, w którym podejmował swe zadanie młody magistrant, ogłosił w tym przedmiocie głośne krytyki Hoene Wroński, którego prace były jednak nieznane w Polsce[2]). W roku 1815 Jan Śniadecki

[1]) Że zamiłowanie to, obok upodobania w innych naukach, było trwałe i mocne, dowodzi fakt, że po wyjeździe z kraju, w czasie pobytu na emigracji w Paryżu, Domeyko uczęszczał gorliwie na wykłady Geometrji wykreślnej Hachette'a i Adhémara, słuchał wykładów Rachunku różniczkowego i całkowego, wykładów Matematyki sławnego Poissona, Fizyki Dulonga, Pouilleta, Francoeura, Gay-Lussaca, Mechaniki niebieskiej Bineta. Lecz pod wpływem wykładów Beaumonta przeważyło upodobanie do Geologji oraz związanego z nią górnictwa i wytknęło Domeyce, po ukończeniu Szkoły górniczej, drogę do Chili w Ameryce, gdzie w przybranej ojczyźnie spędził większą część swojego długiego i wielce zasłużonego dla spraw nauki żywota.

[2]) Introduction à la philosophie de mathématiques, Paryż 1811. Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange, Paryż 1812. Philosophie de l'infini contenant des contreréflexions et des réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal, Paryż 1814. W tej ostatniej pracy poddaje Wroński surowej krytyce dzieło Carnota „Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitéimal“, a któremu poświęca swoje uwagi i Domeyko. O Wrońskim nie znaleźliśmy też żadnej wzmianki w dziełach Śniadeckiego.

czytał swoją rozprawę o Józefie Ludwiku Lagrange'u, w której, między innemi, dotyka sprawy podstaw Rachunku różniczkowego i poddaje roztrząsaniu poglądy wielkiego matematyka, podane w jego słynnej „Teorji funkcyj analitycznych“ [1]). Być może, że te ustępy rozprawy lub bezpośredni wpływ Jana Śniadeckiego pobudziły Domeykę do podjęcia i opracowania wielce interesującego tematu na podstawie obznajmienia się ze źródłami i najpoważniejszemi dziełami, w tym przedmiocie ogłoszonemi.

Rękopis rozprawy stanowi zeszyt z 26 kartek, dość gęstem pismem pisanych. U dołu ostatniej stronicy czytamy wyrazy: „Pisane dnia 20 maja 1822 roku, Ignacy Domeyko“. Na okładce zeszytu dziekan profesor Tomasz Życki napisał własnoręcznie: „Dnia 30 maja 1822 doszła do Oddziału Rozprawa przez JP. Ignace-„go Domeykę w celu publicznego bronienia dla otrzymania stopnia „Magistra Filozofji, do Oddziału Nauk fizyczn. i matem. podana. „Przesyła się członkom Oddziału do kolejnego przeczytania: Astro-„nom obserwator Jan Śniadecki, Profesorowie: Jędrzej Śniadecki, „X. Jundziłł, M. Poliński, J. Twardowski; adjunkci: Horodecki, „Drzewiński, Podczaszyński, Krassowski; zastępcy profesorów: „Wyrwicz, Górski“.

Z nich Jan Śniadecki, Jędrzej Śniadecki, Drzewiński przy swoich nazwiskach dopisali: pierwszy: czytałem, drugi: przejrzał, trzeci: czytał. Czy pozostali (a pomiędzy nimi matematycy) czytali rozprawę, nie wiemy. Domeyce przyznano stopień magistra, a więc rozprawę uznano za dostateczną. Żałować wypada, że dotąd nie udało nam się znaleść żadnych wiadomości ani o przebiegu obrony publicznej, ani o sądzie profesorów o wartości rozprawy. Ujawnia ona poważną znajomość literatury przedmiotu, sumienność opracowania i zmysł krytyczny autora w części jej historyczno-sprawozdawczej, oraz samodzielność w badaniu porównawczem i stawianiu wniosków ogólnych w części drugiej.

---

[1]) O Józefie Ludwiku de Lagrange, pierwszym geometrze naszego wieku. Dzieła Jana Śniadeckiego. Wydanie Michała Balińskiego, Warszawa 1837, tom IV, str. 185—192.

Treść pisma.

I. CZĘŚĆ HISTORYCZNA.

II. WYPROWADZENIE OGÓLNYCH WNIOSKÓW.

I.

1. Uwagi wstępne.

Matematyka, w najogólniejszem wzięta znaczeniu, dwojaką nam korzyść przedstawia. Jedna wynika z jej zastosowań do rozwiązania nieskończenie licznych zapytań, druga zaś z tej czynności, w jaką jest umysł wprawiany w czasie rozbioru prawd i ćwiczeniu się w rozumowaniach matematycznych. Pierwsza wymaga ciągłego doskonalenia sposobów czyli rozmaitych metodów rachowania, i zdaje się, iż głównie zwracała na siebie uwagę nowożytnych matematyków, drugą szczególnie starali się wykształcić starożytni, w których Matematyka była jedynym środkiem rozwijania i kształcenia władz umysłowych.

Jakkolwiek więc istotną jest rzeczą w Matematyce doskonalenie wspomnianych metodów, zawsze jednak poznanie zasad nauki, na których się dokładności wspiera ich rozbiór, to jest przywiedzenie częstokroć zawiłych i skomplikowanych prawd do prostszych i tak zwanych pewników, nakoniec zastanawianie się nad całym postępem umysłu w dochodzeniu prawdy musi być zarówno głównym celem matematyka, uczącym go rozumować i prawdy dochodzić.

Potrzeba doskonalenia metodów była powodem do wynalezienia Analizy, naprzód algebraicznej, potem wyższej; wspomniany zaś teraz cel Matematyki wskaże potrzebę dokładnego wytłuma-

czenia najzawilszych metodów, wyłuszczenia zasad i związku ich z najprostszemi sposobami rozumowania. Lecz ponieważ w Matematyce metody tem są zawilsze, im do ich wynalezienia trudniejsze pytania dały powód, Analiza więc wyższa, która wynikła z dosyć trudnego i zawiłego rozbioru linij krzywych, w wytłumaczeniu swych zasad najwięcej wskazała trudności. Stąd powstała tak wielka rozmaitość sposobów wyprowadzania jej principiów, które jako źródła głębokich i subtelnych rozumowań podobało się matematykom nazwać metafizyką Rachunku wyższego.

Już Geometrja, wydoskonalona przez starożytnych, była zbiorem wielu trudnych i dokładnych metodów; już i Analiza przez nowożytnych do znacznego doskonałości stopnia była posunioną, kiedy Leibniz i Newton pierwsze zasady Rachunku wyższego wskazali uczonemu światu. Były już pewne źródła, pewne wynalazki, z których wpadli na odkrycie Analizy wyższej, a które dzisiaj jeszcze służą do jej wyjaśnienia i dokładnego pojęcia.

2. Źródła, z których pozostały zasady Rachunku wyższego i które służą do ich wyjaśnienia.

Z tych źródeł za najpierwsze można uważać starożytny metod wyczerpania (méthode d'exhaustion), poznany już wówczas z dzieł Euklidesa, Apolloniusza, Archimedesa, mianowicie ich teorji linij i powierzchni krzywych. Starożytni bowiem spostrzegłszy, że w rozbiorze linij krzywych zwyczajne drogi prowadzą do odkrycia i dowiedzenia własności linij prostych była niedostateczną, zmuszeni byli inny nadać obrót swym myślom, inaczej w swych rozumowaniach postępować. Uważali więc linje krzywe za wielkości stateczne, do których się wielokąty w nie wpisane i na nich opisane, za powiększeniem się liczby boków, ciągle zbliżają. Z wiadomych zatem własności wielokątów i ciągłego ich zbliżania się do linij krzywych nabywamy coraz dokładniejszego wyobrażenia o samychże linjach; z upatrzonego zaś w tem zbliżaniu się figur do siebie prawa następności przychodzono do dokładnego ich poznania. Lecz takowa droga wynajdowania prawd najczęściej służyła tylko starożytnym niejako do

ich przewidzenia; do dokładnego zaś doświadczenia tym sposobem przewidzianych prawd używano szczególnego sposobu, zwanego przywiedzeniem do sprzeczności, co należy przypisać głównemu starożytnych w Geometrji dążeniu do największej ścisłości w dowodzeniach, do oczywistego przekonania się o rzeczywistości prawd odkrytych. Podobnież postępowano w rozbiorze powierzchni krzywych i brył niemi zawartych. Używano do tego brył prostokątnych, wpisanych i opisanych na powierzchni krzywej wziętej pod uwagę. Powiększając w nich liczbę ścian, przychodzono do coraz większego wyczerpania miejsca między powierzchnią krzywą i ścianami brył, a spostrzeżone tym sposobem prawo następności dawało przewidzieć pewne szukane własności powierzchni krzywej.

Metod taki w rzeczy samej był pięknym, wymagającym głębokiego zastanawiania się i mocnego natężenia umysłu; nosił też na sobie cechę największej dokładności i ścisłości w rozumowaniach. Starano się tylko uogólnić jego zastosowanie, skrócić trudną i długą drogę w dochodzeniu prawdy, a nadewszystko unikając potrzeby dowodzeń zbocznych, wskazać prawdziwą drogę wynajdowania.

Lecz pomimo usiłowań wielu sławnych matematyków, zaledwo w 17-ym wieku, kiedy Algebra znacznie wydoskonalona znalazła swoje zastosowanie w Geometrji, zjawił się metod Cavaleriusa [1]), głównie dążący do wsparcia i wydoskonalenia dawnego metodu wyczerpania. W tym metodzie linje uważają się za wielkości złożone z punktów, powierzchnie z linij, a bryły z powierzchni. W wywodach swoich Cavalerius zaczyna od rozwiązywania własności samych elementów, wchodzących do składu wielkości, których się rozbiorem zajmuje, następnie usiłuje te wielkości wyrazić przez szereg już poznanych, właściwych im elementów, nakoniec sumując te szeregi, przychodzi do wyrażenia wielkości wziętych pod uwagę. I tak np. uważając powierzchnię trójkąta, jako złożoną z tylu linij równoległych do podstawy, z ilu punktów

[1]) W dziele: „De Geometria indivisibilium etc.“ r. 1635.

składa się wysokość trójkąta, wnosi, że ponieważ każda z tych linij jest w stosunku prostym odległości od wierzchołka, więc cała powierzchnia trójkąta, będąca sumą tych linij, jest sumą pewnego arytmetycznego szeregu, którego ostatnim wyrazem jest podstawa trójkąta, a zaś liczbą terminów jest jego wysokość, czyli równa się wysokości pomnożonej przez połowę podstawy.

Porównywając ten metod z poprzednim, widzimy [1]), że elementa Cavaleriusa czyli te powierzchnie, linje, punkta, które wchodzą do składu wielkości wziętych pod uwagę, zastępują miejsce małych bryłek lub trójkątów Archimedesa, wziętych w tak znacznej liczbie, że różnica pomiędzy niemi a samą figurą będącą przedmiotem rozbioru, jest mniejsza od jakiejkolwiek mogącej się pomyśleć wielkości. Lecz Cavalerius, używając swego metodu nietylko do odkrycia ale i dowiedzenia prawd, 1) uniknął dowodzeń zbocznych; 2) przy pomocy rachunku algebraicznego znacznie skrócił i uprościł najzawilsze wywody; 3) lepiej wskazał drogę wynajdowania. Z drugiej zaś strony, dając wzgląd na dokładności rozumowania, na ścisłość wyrażeń, łatwo spostrzeżemy wyższość metodu starożytnych, gdzie każdy dowód, połączony z oczywistem przekonaniem się, jest wzorem ścisłego rozumowania. W metodzie albowiem Cavaleriusa wyobrażenie ilości niepodzielnych tworzenia się powierzchni z linij, linij z punktów i t. d., trudne do pojęcia, wprowadzają pewną nieścisłość do rozumowań i w żadnym dowodzie nie są zdolne doprowadzić do takowego przekonania się o rzeczywistości prawdy, do jakiego doprowadzają dowody starożytnych. Jednakże metod ten zawsze był ważnym wynalazkiem w Matematyce: jemu winniśmy wiele pięknych teoryj, wynalezionych przez p.p. Fermat, Pascal, Roberval; w dzisiejszym zaś jeszcze stanie Matematyki metod ten znacznie może wesprzeć naszą imaginację w rozbiorze trudnych częstokroć do pojęcia wywodów, mianowicie metodu Leibniza. Lecz około tego czasu podany przez Descartes'a metod ilości nieoznaczonych bliżej jeszcze przystępował do metodu Leibniza i w części może się

[1]) Zdanie Montucla, Lacroix. Traité du calcul diff. T. I. Préface.

za jego zasadę uważać. Główne principium tego metodu jest, że jeśli mamy zrównanie kształtu $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ etc. $= 0$, w którem $A, B, C, \ldots\ldots$ są ilościami statecznemi, a zaś x ilością zmienną, mogącą się stać tak małą, jak sami chcemy, w tem zrównaniu każdy ze współczynników osobno musi się stać $= 0$, to jest: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ etc., jakabykolwiek była liczba terminów.

Kiedybyśmy nareszcie poszli do rozbioru później ukazujących się metodów, mianowicie wynalezionych przez p.p. Fermat, Barrow etc., które są tylko pewnem przekształceniem metodów poprzednich, i porównali je z metodami następnemi, w których się już zasady Analizy wyższej zawierają, wpadlibyśmy zapewne na wyświecenie całego łańcucha prawd, po którym pierwsi wynalazcy Rachunku wyższego wznosić się musieli dla odkrycia własnych metodów, i odkryta tym sposobem droga wynajdowania byłaby zapewne najlepszą skazówką w wyborze metodu, najprzyzwoiciej tłumaczącego zasady Analizy wyższej. Lecz, zdaje się, że droga ta nie jest dobrze wyjaśnioną. Synteza, której się Newton w swych działach tak uporczywie trzyma, brak tego rodzaju systematycznego dzieła, któreby przez Leibniza, jako drugiego wynalazcę Rachuku wyższego, było wypracowane, mogą być głównemi w tym razie trudnościami. Pozostaje mi tylko każdy ze znanych dotąd metodów osobno rozebrać i ze wzajemnego ich między sobą porównania ogólne wnioski wyciągnąć.

3. Metod infinitezymalny Leibniza.

Leibniz najprzód zasady swego metodu wskazał bez najmniejszej demonstracji[1]), opisał tylko swój algorytm, podał prawidła na różniczkowanie funkcyj i dał bardzo krótkie wyobrażenie o zastosowaniach nowego metodu do prowadzenia stycznych i wynajdowania największych i najmniejszych wartości funkcyj. Mówi zaś „demonstratio omnium facilis erit in his rebus versato

[1]) Acta Eruditorum z lipca 1684 w rozprawie: Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus etc.

et hoc unum consideranti ipsas dx, dy, dw, dz et ipsarum x, y, r, w, z (cujusque in sua serie) differentiis seu incrementis et decrementis momentaneis proportionales haberi posse". Nazwawszy ucinek przez x, przystawę przez y, uważa dx za pewną dowolną linję, a zaś dy za czwartą proporcjonalną do podstycznej, podstawy i dx, samą zaś styczną wyraźnie uważa za linję łączącą dwa punkta, nieskończenie blisko przy sobie na linji krzywej położone. W dalszym ciągu przytoczone przykłady bynajmniej nie wyjaśniają dokładnie zasad różniczkowania, i zaledwo później, kiedy metod ten został rozszerzonym już i bardziej wydoskonalonym, spostrzeżono, iż Leibniz całą swoją teorję zasadza na tym pewniku, że ilości, między któremi zachodząca różnica jest nieskonczenie mała, mogą być wzięte jedne za drugie, a zatem, że ilości nieskończenie małe, uważane względnie do skończonych, mogą być uważane za zera. Stąd następnie, jeśliby się w rachunku znalazły ilości, któreby w takim były stosunku do ilości poprzednich już wziętych za nieskończenie małe, w jakim są te ostatnie do ilości skończonych, wówczas takie ilości nazywają się nieskończenie małemi drugiego porządku i uważa je się za zera nietylko względem ilości skończonych, ale i nieskończenie małych pierwszego porządku. Wzajemnie, jeśliby się ukazały takie ilości, względem których ilości skończone mogą się uważać za nieskończenie małe, takie ilości nazywają się nieskończenie wielkiemi i względnie do nich uważane wielkości skończone mogą się wyrzucić z rozmaitych analitycznych wyrażeń.

W rozważaniu, do jakich porządków pewne ilości jawiące się w rachunku, uważane względnie do innych, mają się odnosić, dajemy wzgląd: 1) na ich wymiar, albowiem uważając dx za nieskończenie małe względem jednostki, dx^2 musimy uważać za takież względem dx, gdyż $1 : dx = dx : dx^2$; 2) na porządek różniczkowania. I tak d^2x uważa się za nieskończenie małe względem dx, d^3x względem d^2x etc. Albowiem w wyrażeniu różniczki 2-go porządku

$$Md^2x + Nd^2y + Pdx^2 + Qdx\,dy + Rdy^2 = d^2U,$$

ponieważ 3-i, 4-y i 5-y wyraz zrównania są porządku drugiego względem dx, dy, więc dla zachowania jednorodności muszą i dwa

pierwsze wyrazy w, których się zawiera d^2x, d^2y, być porządku drugiego względem różniczek porządku pierwszego dx, dy [1]).

Z takowego to sposobu uważania rzeczy wniósł Leibniz, że ponieważ między wielokątem o nieskończonej liczbie boków i linją krzywą zachodzić może różnica nieskończenie mała, więc, bez naruszenia dokładności w rachunku, możemy wziąć jedno za drugie. Stąd to poszło, że Leibniz uważa linje krzywe za wielokąty o nieskończonej liczbie boków i—jak sam w jednej ze swych rozpraw powiada [2])—błąd, z takowego uważania rzeczy wynikający, może być tak małym, jak sami chcemy, już to z przyczyny, że w tym razie nie dajemy względu na liczbę boków wielokąta, już to, że im się bardziej powiększa liczba boków, tem się lepiej sprawdza dokładność takowego uważania Lecz z niedokładnego określenia, czem są rzeczywiście ilości nieskończenie małe, z niewykazania, na czem zależy prawdziwa dokładność tego metodu, powstało wiele nieprzyzwoitości, wiele zarzutów, które się zdawały zrazu zupełnie zachwiać prawdziwą teorją metodu nieskończoności. Leibniz usiłował zapobiedz takowej niedostateczności metodu i w jednej z późniejszych rozpraw [3]) wyobrażenie ilości nieskończenie małych chciał wyraźnie przez wyobrażenia ilości nieporównanie małych, co większy jeszcze pozór niedokładności nadało jego teorji. Nieco więc później [4]) podał gruntowniejsze wyobrażenia o tych ilościach, lepiej cokolwiek dające poznać ich naturę. Mówi on, że nie sądzi, aby mogła być dana linja lub liczba nieskończona lub nieskończenie mała. Uważa to raczej za pewien sposób mówienia (modus loquendi), którego nawet Euklides w swoich rozumowaniach używa. Gdy albowiem wpadniemy na wielkości, które żadną liczbą wyrażonemi być nie mogą, przyznajemy im przez analogję taką liczbę, która się może nazwać liczbą nieskończoną. Dodaje więc, iż chociaż niegdyś sądził, iż błąd wynikający

---

[1]) Lacroix, Traite du calcul diff. T. I. p. 238.

[2]) Acta Eruditorum 1684 p. 185: „Additio ad schedam de dimensionibus curvilineorum“.

[3]) Acta Eruditorum 1689 p. 82: De motuum coelestium causis.

[4]) Acta Eruditorum 1712 p. 169: Observatio quod rationis etc.

z użycia takowych wyrażeń może być tak małym, jak sami chcemy, ściśle jednak mówiąc, żadnego w tym razie popełniamy błędu. Pokazuje to na przykładzie, kiedy idzie nam o porównanie średnicy świata ze średnicą ziemi, a następnie ze średnicą atomu. Przychodzi nareszcie do wniosku, iż takowe wyrażenia, jako skracające nasze rozumowania i zgodne z pospolitym sposobem rozumowania, w Matematyce tolerowanemi być mogą. Z tem wszystkiem dokładniejsze wyjaśnienie natury tych ilości, wskazanie, na czem zależy dokładność metodu, było zostawionem badaniu późniejszych matematyków, którzyby prawdziwą metafizykę Rachunku infiniteryimalnego dostatecznie zgłębili.

4. Metod płynień Newtona.

Tymczasem ukazała się już kompletna teorja Newtona, nazwana metodem płynień (methodus fluxionum), która, chociaż na zupełnie odmiennych wsparta zasadach, do jednakowych co i poprzednia prowadziły wypadków [1]). W tym metodzie podobnie zawarte są prawidła różniczkowania i główniejsze zastosowania metodu w rozbiorze linij krzywych. Lecz Newton w tem naprzód różni się od Leibniza, że zamiast uważania linij wprost za wielokąty o nieskończonej liczbie boków, uważa je jako wielkości, utworzone ruchem punktu, którego stateczna chyżość w każdym momencie rozkłada na dwie części: jednę równoległą do osi przystaw, drugą do osi ucinków. Te cząstkowe chyżości są nazwane płynieniami (fluxiones) współuszykowanych linij, chyżość zaś samego punktu — płynieniem łuku. Przeciwnie zaś łuk wykreślony i odpowiednie mu współuszykowane, uważane względnie do właściwych im chyżości, mogące się stopniami nieskończenie wzrastać i umniejszać, są nazwane wielkościami płynącemi (quantitates fluentes).

Skoro się więc założy, że płynienie (fluxio) właściwe łukowi jest stateczne, płynienia współuszykowanych muszą się odmieniać stosownie do każdego rodzaju linji krzywej, a ich stosunek musi

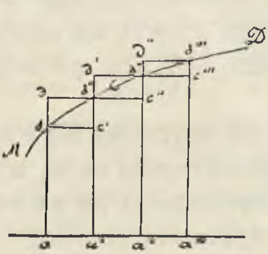
---

[1]) Pierwszy raz kompletny wykład tej teorji wygłosił w dziele: Methodus fluxionum et serierum infinitarum, Londini 1736.

zależeć od stosunku, zachodzącego między współuszykowanemi. Przeciwnie stosunek między współuszykowanemi, stanowiący naturę linij, musi zależeć od właściwych im w każdym momencie chyżości. Cała więc rzecz do dwóch ogranicza się zagadnień: 1) data relatione quem invicem habent fluentes quantitates, determinare relationem quae inter earum fluxionibus intercedit; 2) data aequatione quae contineat quantitatum fluxiones invenire quam relationem habent inter se haec quantitates fluentes [1]).

W ogólności zaś mówiąc, Newton uważa wielkość w swym wzroście lub ubywaniu, nie tak jak nam one zwyczajnie jawią, lecz jakby się okazywały wówczas, gdyby się tworzyły przez ruch innych jakichkolwiek wielkości. Tym sposobem do zasad tego metodu wchodzą wyobrażenia ruchu, chyżości, a zatem i czasu. Lecz, jak sam powiada [2]), tempus formaliter non considero sed suppono quod una ex propositis quantitatibus homogenea cum aliis crescat aequabili fluxu ad quam ceterae tamquam ad tempus referantur, quod ideo per analogiam, non inconinne dici potest tempus — widzimy więc, iż musimy zawsze dowolnie obrać pewną chyżość właściwą, już to przystawie, już ucinkowi, stycznej i t. d. i uważać ją za stateczną i do niej inne chyżości odnosić.

Mnie się więc zdaje, że cała istota tego metodu następnie mogłaby się wyjaśnić. Gdybyśmy np. śledzili własności linji MCD i wzięli punkt a za początek, od którego tenże punkt chyżością jednostajną bieży po linji ucinków AB, skoro przypuścimy, że w tym samym czasie punkt b na tejże płaszczyźnie taki ruch odbywa, że w każdym momencie stosunek między przystawą a ucinkiem czyni zadość zrównaniu na linję MCD, np. $y = f(x)$, wypadnie nam, że chociaż drogi aa', bb', cc' etc., ubiegane w czasach równych przez punkt a, są sobie równe, jednakże chyżości właściwe przystawie i łukowi, a zatem drogi im odpowiednie, sto-



Rys. 1.

[1]) Methodus fluxionum, Editio Castilionei a. 1744, Tl. p. 55, 61.

[2]) Methodus fluxionum T.— I, p. 54.

sownie do natury zrównania $y = f(x)$, muszą się w każdym momencie ruchu odmieniać. Współcześnie więc, kiedy punkt a znajdować się będzie w położeniach b', b'', b''', a ubiegane drogi bb', $b'b''$, $b''b'''$ etc. ciągle by się odmieniały 1) co do wielkości, 2) co do względnego do siebie nachylenia, razem zaś wzięte utworzyłyby wielokąt $bb'\,b''b'''\ldots$, tem bardziej przystający do linji krzywej, im mniejsze są momenta, w których punkt a ubiega drogi aa', $a'a''$, $a''a'''$, czyli ponieważ te drogi są w stosunku prostym momentów, więc im przyrostki powiększania się linji Aa będą mniejsze. Nareszcie, kiedy w granicy swego niknienia momenta— albo też co jedno znaczy — przestrzenie aa', $a'a''$, $a''a'''$, ... zamienią się na nieskończenie małe, wielokąt zamieni się na linję krzywą.

Takowy sposób uważania linij krzywych, właściwy metodowi płynienia, zdaje się być nieco ukrytym w wykładzie N e w t o n a, w niektórych jednakże miejscach, jak w wywodzie, użytym do wyprowadzenia różniczek każdej funkcji [1]), w wyprowadzeniu pierwszego sposobu prowadzenia stycznych [2]) i t. d., widoczniej się to okazuje. Przekonywamy się więc, że N e w t o n do rozbioru linij krzywych używał wielokątów o nieskończonej liczbie boków, i w tem się tylko różnił od L e i b n i z a, że, zamiast uważania linji krzywej wprost za wielokąt o nieskończonej liczbie boków, uważa ją za granicę wielokąta, nieskończenie powiększającego liczbę swych boków. A zatem w zasadach metodu N e w t o n a zawierają się nietylko wyobrażenia nieskończoności, ale też pierwszych ostatnich granic.

Czemże się różnić będą w rachunku płynienia N e w t o n a od właściwie zwanych różniczek. Do odpowiedzenia na to, trzeba, zdaje mi się, porównać sposób, jakim przychodzimy do wyprowadzenia płynień N e w t o n a, ze sposobem wyprowadzenia różniczek w metodzie L e i b n i z a.

---

[1]) Fluentium quantitatum momenta videlicet eorum partes indefinite parvae quarum accessione infinite exiguis partibus temporis quantitates ipsae jugiter augentur, sunt ut velocitates quibus fluunt aut crescant. Methodus fluxionum, p. 59.

[2]) Methodus fluxionum, p. 89.

Z wywodu, podanego przez Newtona na rozważanie pierwszego z dwóch wyżej wspomnianych zagadnień, spostrzegamy, że tam, gdzie Leibniz dla otrzymania różniczki dfx podstawia w fx, za x, $x+dx$, Newton, dla otrzymania płynienia $\dot{x}$, podstawia w funkcji za x, $x+\dot{x}o$. W dalszym zaś ciągu spostrzegamy, że $\dot{x}o$ czyli przyrostek, o który się ucinek powiększa, jest drogą, ubieżoną przez punkt a w czasie $\frac{1}{\infty}$, czyli w czasie, który w granicy swego niknienia jest zerem. W takowem więc wyrażeniu, ponieważ jednym mnożnikiem jest czas, drugim, to jest $\dot{x}$, musi być chyżość punktu, która zawsze być musi ilością skończoną. Albowiem wyobrażenie chyżości jest względne i odnosi się zawsze w tym metodzie do pewnej jakiejkolwiek statecznej chyżości, a zatem zamiast wyrażenia $\dot{y}$ mógłbym zawsze położyć pewien stosunek między przyrostkiem ilości y i przyrostkiem wielkości, której chyżość jest stateczna, np. x, czyli—ponieważ te przyrostki są nieskończenie małe — mógłbym za $\dot{y}$ położyć $\frac{dy}{dx}$. Skąd wnosimy, że płynienie Newtona raczej za współczynniki różniczkowe, za granice stosunku między przyrostkami, niż za różniczki uważać nam wypada.

Ponieważ więc płynienia Newtona są ilościami skończonemi, więc względnie uważane mogą się brać za współuszykowane innej linji, której chyżości względem poprzednich nazywają się fluxiones fluxionum, te zaś następnie mogłyby być wzięte i za współuszykowane trzeciej linji i t. p., a tym sposobem przyszlibyśmy do wyobrażenia rozmaitego porządku płynień, które odpowiadają rozmaitego porządku różniczkowaniom. Te zaś porządki oznacza Newton przez liczbę kropek nad ilością płynącą, np. $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, etc., co wyraża płynienie ilości y pierwszego, drugiego, trzeciego porządku.

Metod ten jednakże mało wyjaśniony w dziełach Newtona, później doskonalony przez pp. Taylor i Mac Laurin, wielu ulegał zarzutom. W nim widziano nieprzyzwoitości metodu Leibniza, razem połączone z wyobrażeniami granic, które wówczas

jeszcze nie były dokładnie oznaczonemi. Chociaż albowiem Newton przez wyrażenie przyrostków pod kształtem $\dot{x}o$ unika napozór tego przypuszczenia, że ilości nieskończenie małe nikną przed skończonemi, w rzeczy jednak samej w każdym z wywodów Newtona musimy się tego przypuszczenia domyślać: albowiem $\dot{x}o$ niczem innem nie jest tylko $\dot{x}.\frac{1}{\infty}$, i kiedy mówimy, że $\dot{x}o$ musi się wykasować z wyrażenia, domyślamy się, że $\dot{x}o$, jako nieskończenie mała ilość, niknie przed ilością skończoną. Zarzucano Newtonowi jeszcze, że do Geometrji, która jest częścią Matematyki czystej, wprowadził wyobrażenia chyżości, właściwe tylko Matematyce mieszanej, i że tym sposobem wyobrażenia czyste oznaczał przez wyobrażenia nauk a posteriori. Lecz widzimy, że zarzut ten jest niesłusznym. Albowiem: 1) jeśli rozmaitość, kształt, wielkość, położenie i t. d. możemy uważać oderwanie i takowe wyobrażenia odnieść do Matematyki czystej, też i ruch mógłby się wyobrażać oderwanie i takowe wyobrażenia, jako czyste, mogłyby być przedmiotem Matematyki czystej; 2) chociażby ten zarzut był słusznym, wyobrażenia ruchu, chyżości, czasu są tak jasne, że ich możnaby było użyć do wytłumaczenia pewnych praw w Matematyce czystej, częstokroć daleko bardziej skomplikowanych niżeli niektóre wyobrażenia, wzięte z Matematyki stosowanej. Raczej możnaby zarzucić, że wywody Newtona nie są tak ogólne, aby się wprost do każdego rodzaju ilości dały stosować, i zastosowania Rachunku mogą być zanadto zawiłe; że wywody Newtona ściągają się jedynie do różniczkowania samych zrównań i t. p.

Zdaje się nawet, iż sam Newton znał dokładnie niedostateczność zasad przez siebie wynalezionych. Pracował nad wynalezieniem innego metodu, któryby wygodniejszym był i łatwiejszym w zastosowaniach, i w tym celu ogłosił nowy metod pierwszych i ostatnich stosunków (rationum primarum et ultimarum) [1]).

5. Metod granic Newtona.

Cały ten metod do dwóch zasadowych prawd odnieść się może: 1) dwie ilości, między któremi zachodząca różnica jest

[1]) Philosophiae naturalis principia mathematica, liber I, sect. 1.

mniejsza od jakiejkolwiekbądź mogącej się pomyśleć ilości, są równe pomiędzy sobą; 2) dwie granice jednej i tejże samej wielkości jako też ich wyrażenia powinny być między sobą równe.

W ogólności zaś mówiąc, jeżeli przypuścimy, że pewne ilości względnie i jednocześnie zbliżają się do drugich, uważanych za stateczne, aż do tego kresu, że różnica między pierwszemi i drugiemi ilościami może być tak mała, jak sami chcemy, stosunki, zachodzące między ilościami drugiego rodzaju, to jest uważanemi za stateczne, są ostatniemi stosunkami (ultimae rationes) tych ilości, które się do nich jednocześnie zbliżały; te już same ilości stateczne nazywają się granicami (limites), czyli ostatniemi wartościami ilości, które się do nich zbliżają.

W zastosowaniach do Geometrji granicami są wielkości, których rozbiorem zatrudniamy się. Są to najczęściej same linje krzywe; wielkościami zaś, które się do nich nieskończenie zbliżają, są wielokąty o nieskończonej liczbie boków. W rozbiorze więc własności linij krzywych zaczynamy tak, jak i w metodzie wyczerpania, od rozważania własności wielokątów wpisanych w linję krzywą, powiększamy potem liczbę boków czyli zmniejszamy wielkości boków wielokąta, ażeby różnica między nim i samą linją była tak mała, jak sami chcemy, i uważamy, na co się zamienią własności wielokąta czyli stosunek, zachodzący między jego współszykowanemi, wówczas, kiedy wielkość jego boków będzie w granicy swego niknienia. Ponieważ zaś w metodzie granic, tak jak we wszystkich innych, w których zasady Rachunku wyższego zawierają się, wielkości uważają się w swym wzroście lub ubywaniu, przedmiotem więc Rachunku są małe przyrostki współuszykowanych właściwych wielokątowi, które w granicy swego niknienia mają między sobą zachować stosunek równy stosunkowi między przyrostkami współuszykowanych linji krzywej, będącej granicą wielokąta. Metod zatem granic zaraz uległ pewnej nieprzyzwoitości, której wypadkiem był następujący zarzut: jeśli te przyrostki w granicy swego niknienia stają się zerami, stosunek $\frac{0}{0}$ jest trudnym do pojęcia, a jak Newton powiada[1]), musi być także

[1]) Ph. natur. ed. I. le Seur et F. Jacquier, Genève 1739. T. I. p. 81

równym zeru, stosunek zaś, zachodzący między niemi przed ich ostatecznem zniknieniem, nie może się uważać już za ostatni stosunek, czyli za równy swojej granicy. W Mechanice podobnież te wątpliwości dają się spostrzegać, gdzie z chyżościami to samo się dzieje, co ze stosunkami, jakie zachodzą między niknącemi współuszykowanych przyrostkami w Geometrji. Tam możemy zarzucić, że jeśli ciało w swym ruchu doszło już do ostatecznej granicy i ruch ustaje, chyżość ciała musi być równa zeru, chyżość zaś ciała, które jeszcze swojej granicy nie doszło, nie jest ostateczną chyżością.

Newton tak się stara tę trudność ułatwić, że przez ostateczną chyżość ciała nie rozumie tej chyżości, która jest właściwą ciału przed lub po jego dojściu do ostatniego punktu, w którym ruch ustaje, lecz tę, z którą ciało ostatniego dobiega punktu, z którą już biec przestaje, Podobnież ostatecznym stosunkiem między ilościami niknącemi nie jest stosunek, mający bytność przed lub po ich zniknieniu, lecz stosunek, z jakim one nikną. Dodaje nareszcie, że ostateczne stosunki, z któremi ilości nikną, nie są w rzeczy samej stosunkami pewnych oznaczonych ilości, do którychby tamte w swem ciągłem ubywaniu doszły, lecz są tylko granicami, do których stosunki między ilościami nieskończenie zmniejszającemi tak mogą się zbliżyć, że powstająca stąd różnica może być mniejszą od jakiejkolwiekbądź danej ilości, i których ilości niknące dopiąć nie mogą przed zamienieniem się na nieskończenie małe.

Lecz widzimy, że Newtona odpowiedź na powyższe zarzuty nie może być dostateczną. Trudno albowiem i nawet nie podobna mieć wyobrażenia o ilościach wziętych w stanie swego niknienia, o chyżości, której skutkiem nie jest pewien ruch, ale ustanie ruchu. Stąd się tylko dało widzieć, że metod granic w bardzo bliskiem jest powinowactwie z metodem nieskończonosci Leibniza, że wyobrażenia ilości nieskończonych w jego się zasadach zawierają. Wyłuszczenie zaś dokładniejsze metafizyki tego metodu i razem za jego pomocą wyłożenie całej nauki Rachunku wyższego zostawionem było badaniom późniejszych matematyków.

Z tem wszystkiem, pomimo tak widocznej niedostateczności wyłożonych metodów, przez długi czas metod płynień był upowszechnionym w Anglji, zresztą zaś wszędzie trzymano się metodu

Leibniza jako łatwiejszego w zastosowaniach, bardziej wydoskonalonego pracami markiza d'Hôpital, Bernoullich i innych sławnych matematyków.

6. Metod Landena.

Jednakże wyższość metodu Leibniza nad metodami Newtona zdaje się głównym była powodem Anglikom, uporczywie trzymającym się narodowego metodu, do wielkich usiłowań w zaradzeniu nieprzyzwoitościom, wynikającym z wprowadzenia do zasad Rachunku wyższego wyobrażeń ruchu, chyżości i t. d. Widziano już, że w całej Matematyce Analiza algebraiczna była najprostszym i najdokładniejszym sposobem rozumowania, starano się więc i Analizę wyższą przyprowadzić do postaci prawdziwie algebraicznej. W tym więc celu geometra angielski John Landen ogłosił swój metod [1]) (w dziele The residual Analysis, 1760), który się głównie ściągał do wynalezienia ilorazu, wynikającego z podzielenia różnicy między dwoma stanami funkcji przez różnicę między dwiema wartościami ilości zmiennej, czyli rozwinienia ułamku $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$. Z tego zaś rozwinienia Landen przez założenie $x' = x$ przychodzi do otrzymania pewnej szczególnej wartości (special value), która, jak widzimy, odpowiada dokładnie współczynnikowi różniczkowemu.

Lecz, jak się okazuje, cała dokładność tego metodu zależy na ogólnem dowiedzeniu, że różnica między dwoma stanami funkcji zawsze jest kształtu

$$P\omega + Q\omega^2 + P\omega^3 + S\omega^4 + \ldots,$$

Landen zaś nie podał na to ogólnego dowodu i zaledwo pierwszy Euler okazał a priori ogólność tego twierdzenia. Prócz tego, zdaniem P. de la Grange [2]), działania rachunkowe i ich zastosowania w tym metodzie są trudne i nienaturalne, i należy przyznać, że tym sposobem, nadając większą dokładność Rachunkowi, traci się w nim na prostocie i łatwości.

[1]) Lacroix. Traité du calcul etc. T. I. 239.

[2]) De la'Grange. Théorie des fonctions. Paris 1813, p. 4.

7. Teorja Eulera.

Tymczasem stronnicy metodu Leibniza pracowali również nad wydoskonaleniem przez siebie przyjętych zasad Rachunku wyższego. Starano się mianowicie dać dokładniejsze i łatwiejsze do pojęcia wyobrażenie o ilościach nieskończenie małych. Euler wniósł, że w rachunku ilości nieskończenie małe powinny się uważać za zera, a Rachunek różniczkowy za sztukę wynajdowania stosunku pomiędzy niknącemi przyrostami jakichkolwiek funkcyj, skoro się zakłada, że przyrostek ilości zmiennej, od której te funkcje zależą, staje się równym zeru. Cała więc różnica sposobu uważania Eulera od metodu Leibniza zdaje się zależeć na samem definjowaniu różniczek, a stąd i na tłumaczeniu przyczyny, dla której ilości nieskończenie małe z ostatecznych wypadków rachunku powinny się wyrzucać. Zdawało się, że już przez to nada się charakter większej dokładności metodowi Leibniza. Lecz nowe trudności, nowe zarzuty powstały. Zaraz zarzucono Eulerowi, że według niego Analiza wyższa byłaby rachunkiem zer, rachunkiem stosunków między zerami, o których żadnego wyobrażenia mieć nie możemy; że nawet w tych razach, gdzie się stosuje teorje Leibniza do rozmaitych porządków ilości nieskończenie małych, teorja Eulera musiałaby być za nadto zawiłą.

8. Sposób wyprowadzenia zasad podany przez P. Lhuiliera.

W roku 1786 królewska Akademja Nauk podała do nagrody ułatwienie dotychczasowych trudności, dających się spostrzegać w wytłumaczeniu zasad Rachunku wyższego. Teorja, podana przez p. L'huiliera, była uwieńczoną, w niej zaś wywód zasad jest dosyć ogólny, zdający się blisko przystępować do wywodu, podanego przez Landena. Zasadą albowiem tego metodu jest, że skoro w jakiemkolwiek wyrażeniu $y = fx$, powiększywszy x przyrostkiem Δx, y zamienia się na $y + \Delta y$, stosunek między temi przyrostkami da się wyrazić przez

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = p + q\Delta x + r\Delta x^2 + s\Delta x^3 + \ldots,$$

gdzie $p, q, r \ldots$ są ogólnemi funkcjami ilości x i według pew-

nych ostatecznych praw wynikają z pierwotnej funkcji fx. Dopóki Δx jest jakąkolwiek rzeczywistą, chociażby najmniejszą, ilością, dopóty stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zależy od Δx. Za ciągłem więc zmniejszaniem się wielkości Δx musi następować ciągła odmiana stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, i w końcu, gdy $\Delta x = 0$, stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x} = p$, i na oznaczenie tego szczególnego przypadku znak Δ powinniśmy zamienić na inny, np. na $\frac{dy}{dx} = p$. Ponieważ zaś p jest pewną oznaczoną funkcją ilości x, więc i o iłości p tożsamo możemy powiedzieć, cośmy powiedzieli o funkcji poprzedniej fx, to jest, że $\frac{dp}{dx}$ może się równać pewnej oznaczonej funkcji ilości x, np. p', a stąd $p' = \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$. I tak podobnie wywodzi się cały algorytm Rachunku wyższego, droga zaś, jaką przychodzimy do otrzymania ogólnych współczynników $p, q \ldots$, służy do otrzymania szczególnych prawideł na różniczkowanie rozmaitego rodzaju funkcyj.

Tym sposobem zasady Rachunka wyższego zostały dosyć dokładnie i po prostu wywiedzione. Cały wywód już jest analitycznym, wolnym od wyobrażeń właściwych metodowi Newtona lub Leibniza, i zapewne był wówczas ze znanych najprzyzwoitszym. Pozostawało, zdaje mi się, tylko wskazać dokładnie naturę stosunku $\frac{0}{0}$, na który się zamienia stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, kiedy $\Delta x = 0$, i w ogólności wyjaśnić lepiej naturę wszystkich współczynników różniczkowych i ich znaczenie tak w Geometrji, jakoteż w Mechanice. Albowiem te stosunki w zastosowaniach Rachunku po największej części nie z różniczkowania ale z bezpośredniego rozważania geometrycznych figur powstając, powinny mieć sobie właściwe pewne charakterystyczne cechy, w którychby w rozważaniu rozmaitych wielkości od innych stosunków były rozróżnione, powinny mieć wskazane źródła i sposoby, jakiemi się tworzą i dają zastosowywać w rachunku.

9. Teorja p. d'Alembert.

Około tegoż czasu d'Alembert usiłował wydoskonalić metod granic Newtona[1]). W swojej więc Encyklopedji uważa współczynnika różniczkowego za granicę stosunku między przyrostkiem funkcji i ilości zmiennej, kiedy przyrostek zmiennej bierze się w granicy swego zniknienia równym zeru. Na zarzut zaś wyżej wspomniany, że nie można mieć dokładnego wyobrażenia o stosunku zachodzącym między zerami, tak odpowiada: 1) że nie popełniamy żadnego błędu, kiedy stosunkowi $\frac{0}{0}$ przyznajemy jakąkolwiekbądź wartość, a zatem kiedy mu przyznajemy wartość współczynnika różniczkowego $= p$; 2) chociaż ta granica wynajduje się wówczas, kiedy założymy $dx = 0$, $dy = 0$, jednakże w istocie ta granica nie jest wartością stosunku zachodzącego między $dx = 0$, $dy = 0$, ale ilością, do której stosunek $\frac{dy}{dx}$, przypuściwszy, że dx i dy są rzetelne i zmniejszające się, coraz bardziej się przybliża, i może sie o taką ilość, o jaką tylko chcemy, przybliżyć. Lecz widzimy, że w takowem ułatwieniu trudności d'Alembert wpada na użycie wyobrażenia, że w granicy stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, gdyż według P. d'Alembert gr $\frac{\Delta y}{dr} = \frac{dy}{dx} \pm \alpha$, gdzie α wyraża ilość tak małą, jak sami chcemy, a zatem nieskończenie małą, mogącą się względnie do $\frac{dy}{dx}$ z rachunku wyrzucić. Cała zaś nauka Rachunku różniczkowego u d'Alemberta odnosi się do jednego tylko przedmiotu, że w nim, mając wiadomą w linjach granicę jakiegokolwiek stosunku, szukamy algebraicznego wyrażenia granicy tegoż samego stosunku, a równając ze sobą takowe podwójne wyrażenie granicy, przychodzimy do odkrycia nowych nieznanych stosunków.

---

[1]) Encyclopédie méthodique. Mathématiques, Paris, 1784. T. I, pod différentielle.

10 Metod analitycznych funkcyj Lagrange'a.

Pod daleko ogólniejszym kształtem, pod daleko prostszą i prawdziwie analityczną postacią, w tymże prawie czasie zasady Rachunku wyższego wskazał Lagrange. Dotąd jeszcze nikt tak zręcznie, tak dowcipnie nie uniknął wyobrażeń nieskończenie małych lub stosunków zachodzących między zerami, w żadnym nakoniec metodzie Analiza więc nie jest tak ściśle związana z Analizą algebraiczną, jak w metodzie analitycznych funkcyj [1]).

Lagrange uważa wszystkie wyrażenia algebraiczne i przystępne, jakiebykolwiek one były, pod naogólniejszą postacią, pod postacią funkcyj pewnych odmiennych ilości. Dając zatem wzgląd na same ilości zmienne, wchodzące do składu wyrażeń, oznacza te wyrażenia, stosownie jak są funkcjami jednej, dwu, trzech i t. d. ilości zmiennych, przez fx, $f(x, y)$, $f(x, y, z)$ i t. d.

Na wstępie do swojej nauki dochodzi ogólnego kształtu rozwinienia funkcyj, skoro się w niej ilości zmienne powiększą pewnym nieoznaczonym przyrostkiem i. Dowiódłszy zatem a priori, że to rozwinienie jest kształtu

$$f(x+i) = fx + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots, \qquad \text{(X)}$$

gdzie $p, q, r, \ldots$ są funkcjami ilości x, usiłuje poznać bliżej naturę współczynników $p, q, r, \ldots$ i związek zachodzący między niemi i samą funkcją fx, która się nazywa funkcją pierwotną. Nakoniec robi uwagę, że, czy my w $f(x+i)$ zamieniamy x na $x+o$, czy też i na $i+o$, zawsze funkcja nierozwiniona $f(x+i+o)$ będzie jednakową i identycznie sobie równą, a zatem w obu razach i rozwinienia tej funkcji $f(x+i+o)$ muszą być identycznie sobie równe.

Kładzie się więc w rozwinieniu funkcji $f(x+i)$ naprzód, za i, $i+o$, i otrzymuje

$$f(x+i+o) = fx + pi + qi^2 + \ldots$$
$$+ po + 2qio + \ldots$$

[1]) Théorie des fonctions analytiques. Paris 1813. Leçons sur le calcul des fonctions. Paris 1806.

Następnie w temże rozwinieniu kładzie, za x, $x+o$, czyli — ponieważ tylko we współczynnikach funkcyj fx, p, q etc. zawiera się x, — zamienia

$$fx \text{ na } fx + f'xo + f''xo^2 + \ldots$$

$$p \text{ na } p + p'o + p''o^2 + \ldots$$

$$q \text{ na } q + q'o + q''o^2 + \ldots$$

a stąd przychodzi do powtórnego rozwinienia

$$f(x+i+o) = fx + pi + pi^2 + \ldots$$
$$+ f'xo + p'io + \ldots$$

Równając ze sobą podwójne te rozwinienia, jako identycznie sobie równe, a w szczególności współczynniki terminów sobie podobnych, otrzymuje

$$p = f'x, \quad q = \frac{1}{2}p', \quad r = \frac{1}{3}q', \quad s = \frac{1}{4}r' \text{ i t. d.},$$

skąd wnosi, że podobnie: jak $f'x$ powstała z fx i może się nazwać funkcją pochodną pierwszą funkcji fx, tak p' musiało powstać i być funkcją pochodną pierwszą funkcji p, tak podobnie q' funkcji q i t. d. Ponieważ zaś q jest funkcją pochodną pierwszą funkcji p, a zaś p pochodną pierwszą funkcji fx (gdyż $p = f'x$, $q = \frac{1}{2}p'$), więc i q może się nazwać funkcją pochodną drugą funkcji fx, a zaś r pochodną trzecią funkcji fx i t. p. Stąd zaś taki algorytm wynika, że jak $p = f'(x)$, tak $q = \frac{1}{2} f''(x)$, $r = \frac{1}{2.3} f'''(x), \ldots$ gdzie przez liczbę kresek oznacza się porządek funkcji pochodnej.

Zrównanie więc (X) zamieni się na

$$f(x+i) = fx + \frac{i}{1} f'x + \frac{i^2}{1.2} f''x + \frac{i^3}{1.2.3} f'''x + \ldots \quad \text{(Y)}$$

czyli, wyrażając funkcje fx, $f'x$, $f''x\ldots$ przez y, y', y'',..., otrzymamy:

$$f(x+i) = y + \frac{i}{1}y' + \frac{i^2}{1.2}y'' + \frac{i^3}{1.2.3}y''' + \ldots$$

Po takowym wywodzie przyjmuje rozwinienie (Y) za zasadę całego Rachunku wyższego, którego celem według Lagrange'a jest wynalezienie związku, zachodzącego między funkcjami różnych porządków, czyli wynalezienie w każdym razie, z danej funkcji pierwotnej funkcyj pochodnych rozmaitego porządku.

Na ten więc koniec dosyć było Lagrange'owi zauważyć drogę, prowadzącą do rozwinienia (Y), aby wnieść, że dla otrzymania funkcji pochodnej pierwszej należy w danej funkcji powiększyć ilość x przyrostkiem i, rozwinąwszy zaś tak powiększoną funkcję, wziąć trzeba współczynika przyrostka i zostającego w stopniu pierwszym. Dla wynalezienia funkcji pochodnej 2-giej potrzeba albo szukać współczynnika ilości i^2, albo też wiedząc, że y' jest funkcją pochodną pierwszą funkcji y, należy postąpić tak, jakeśmy postępowali z fx dla otrzymania $f'x$. Cała zatem rzecz do tego się tylko odnosi, aby z każdej danej funkcji wynaleść funkcję pochodną pierwszą.

W całym więc wykładzie Rachunku wyższego, podanym przez Lagrange'a, mamy do czynienia z samemi tylko funkcjami rozmaitych porządków, a zatem tak jak i w metodzie granic z samemi tylko współczynnikami różniczkowemi. Wszystkie użyte sposoby są algebraiczne, żadne w nich nie dają się widzieć przypuszczenia lub też wyrażenia trudne do pojęcia, a zatem we wszystkich daje się spostrzegać wielka oczywistość i dokładność. W każdym albowiem punkcie wpadamy na naukę szeregów, po naukę, w której, jak Lagrange powiada, przedmiotem naszej uwagi są funkcje, wypadające z działań algebraicznych, z rozwinienia na szeregi funkcyj [1]), w których jedna lub kilka ilości nieoznaczonych powiększa się przyrostkiem. Samo rozwinienie funkcji ogólnie uważane tworzy rozmaitych porządków funkcje pochodne, które podciąg-

---

[1]) Leçons sur le calcul des fonctions. Leçon 1-re.

nięte pod pewien przyzwoity algorytm, mogą się same w sobie uważać niezależnie od szeregów, z których powstały.

Powodem do takowego traktowania Rachunku wyższego, zdaje się, były następujące uwagi Lagrange'a. Zgłębiając rozmaite sposoby uważania jednego i tego samego metodu (Analizy wyższej), spostrzegamy, że wszystkie zmierzają do podania sposobu na otrzymanie osobno pierwszego tylko wyrazu rozwinienia przyrostu funkcji, do oderwania niejako i oddzielenia tego wyrazu od reszty szeregu. Wszystkie albowiem zadania, których rozwiązanie wymaga pomocy Rachunku różniczkowego, zależą od wynalezienia tego pierwszego wyrazu.

Rozbiór linij krzywych dał początek wynalezienia metodu infinitezymalnego, który się wkrótce przekształcił już to na metod ilości niknących, już to na metod granic, rozważanie zaś natury ruchu ciał zrodziło metod płynień. Tym sposobem wyciągnięte zasady przeniesiono do Algebry; nie zważano zaś, a przynajmniej nie okazuje się, aby zważano, że zadania zależące od tych metodów, analitycznie uważane, redukują się tylko do wynajdowania funkcyj, będących pierwszemi wyrazami w rozwinieniach przyrostków funkcyj, albo też do wynalezienia funkcyj pierwotnych z danych funkcyj pochodnych.

Naturalniej więc i prościej jest bezpośrednio rozważać rozwinienia funkcyj, bynajmniej nie używając tych metafizycznych przystępów i wybiegów, w których się wyobrażenia ilości nieskończonych albo granic zawierają, a tym sposobem Rachunek różniczkowy, zasadzając na samem rozwinieniu funkcyj, odnieść go do źródła prawdziwie algebraicznego.

Tak rozumuje Lagrange w daniu powodów, które przywiodły go do użycia teorji funkcyj w wykładzie Rachunku wyższego. Powody zaś te, jak są ważne i oczywiste, powinny nam okazać zastosowania, stanowiące 2-ą i 3-ią część głównego w tym przedmiocie dzieła Lagrange'a. Nad temi to zastosowaniami winienem się nieco dłużej zastanowić.

W rozbiorze zastosowań Rachunku wyższego do Geometrji i Mechaniki trzy główne teorje mogą nam w dalszym ciągu posłużyć do omówienia metodu funkcyj. To jest: 1) teorja rozmaitego

stopnia stykania się z sobą linij; 2) teorja kwadrowania; 3) wyprowadzenie, czem są w nauce ruchu współczynniki 1-go i 2-go rzędu. Inne albowiem teorje, jak np. wynajdowanie największych i najmniejszych wartości albo same z siebie okazują, że metod funkcyj z łatwością do ich wyprowadzenia może być użytym, albo też pod którąkolwiek z poprzednich dadzą się podciągnąć.

W wynajdowaniu pierwszej ze wspomnianych teoryj według Lagrange'a tak postępujemy. Dwie naprzykład linje bierzemy pod uwagę: jednę jakąkolwiek $y = fx$. drugą zaś, do której się pierwsza odnosi, $q = Fp$. W punkcie zetknienia się z sobą dwóch linij będzie $p = x$, $y = q$, a zatem $fx = Fx$. Za punktem zetknienia się, różnica między przystawami $f(x+i)$ i $F(x+i)$, czyli odległość między dwoma punktami, wziętemi na dwóch linjach, na pewien ucinek $x+i$, wyrazi się przez

$$D = i(f'x - F'x) + \frac{i^2}{2}(f''x - F''x) + \ldots.$$

Ta różnica tem będzie mniejszą, a zatem linje tem się bardziej zbliżą do siebie, im więcej terminów początkowych szeregu zniknie. Dla tego zaś początkowych, że od nich, jako mogących się w każdym razie stać większemi od sumy wszystkich dalszych terminów, wartość całego szeregu zależy.

Przypuśćmy teraz, że trzecia linja $s = \varphi r$ ma z dwiema pierwszemi, na wielkość ucinka $= x$, jeden punkt wspólny, czyli że $fx = Fx = \varphi x$. Za tym punktem różnice między przystawami wyrażą się przez

$$D = i(f'x - F'x) + \frac{i^2}{2}[f''(x+j) - F''(x+j)],$$

$$\Delta = i(f'x - \varphi'x) + \frac{i^2}{2}[f''(x+j) - \varphi''(x+j)]\ ^{1)}.$$

Jeżeli przypuścimy, że dwie pierwsze linje tak są do siebie zbliżone, że $F'x = f'x$, łatwo się przekonamy, że i, jako ilość

[1]) s jest ilością nieoznaczoną, zawartą między granicami 0 i 1.

nieoznaczona, tak małą może przybrać wartość, że Δ, w którem $f'x - \varphi'x$ nie jest równe zeru, stanie się większem aniżeli D, czyli że między pierwszą i trzecią linją większa zachodzi odległość aniżeli między pierwszą i drugą. Ponieważ zaś to dzieje się z przyczyny, że w wartości na Δ znajduje się wyraz nie mnożony przez i, więc dopóty trzecia linja nie będzie mogła przejść pomiędzy dwie pierwsze, dopóki $f'x$ nie stanie się $= \varphi'x$.

Podobnież, jeśli przypuścimy, iż między dwiema pierwszemi linjami staje się $f'x = F'x$, $f''x = F''x$, przekonamy się, że linja $s = \varphi r$ nie inaczej w swym biegu przejdzie między dwie pierwsze, aż $f'x = \varphi'x$, $f''x = \varphi''x$, i t. p.

To okazawszy, na czem zależy rozmaity stopień stykania się ze sobą linij, idziemy do poznania, które linje mogą zadosyć uczynić warunkom stykania się stopnia 1-go, 2-go, ..., to jest które ze swojej natury z niemi taki zachować mogą związek, aby na pewną wartość ucinka nietylko jej przystawy funkcja pierwotna, ale też i funkcje pochodne tejże przystawy 1-go, 2-go, 3-go, ... porządku stały się równemi funkcji pierwotnej i pochodnym tychże porządków przystawy, należącej do drugiej jakiejkolwiek bądź linji.

Lecz kiedy nam chodzi o poznanie, czy pewna dana linja $y = fx$ może uczynić zadosyć warunkom stykania się 1-go, 2-go, ..., n-tego stopnia z drugą daną linją $p = Fq$, szukamy tylko, czy tej linji możemy nadać taki kształt i położenie, aby tym sposobem zadeterminowane jej zrównanie mogło uczynić zadosyć warunkom: $f'x = F'x$, $f''x = F''(x)$, ..., $f^{(n)}x = F^{(n)}x$. Ponieważ zaś dla nadania położenia i kształtu linji krzywej możemy wprowadzić tyle dowolnych warunków, ile ich potrzeba na oznaczenie ilości niedeterminowanych statecznych, zawartych w fx, temi zaś dowolnemi warunkami mogą być same zrównania $f'x = F'x$, $f''x = F''x$ ..., więc, mając daną jakiegokolwiek rodzaju linję, możemy jej nadać taką wielkość i położenie, że jej zrównanie uczyni zadosyć tylu osobnym warunkom $f'x = F'x$, $f''x = F''x$, ..., ile na ogólnem zrównaniu na tę linję zawiera się ilości statecznych niedeterminowanych mniej jednym. Jeśli więc $y = fx = f(x, a, b)$, wnosimy, iż tego rodzaju linji możemy nadać taką wielkość i położenie względem innej linji np. $p = Fq$, że jej

zrównanie zadosyć uczyni dwóm warunkom $f(x, a, b) = Fx$, $f'(x, a, b) = F'x$, i że żadna inna linja kształtu $\varphi(r, A, B) = s$ nie przejdzie pomiędzy dwie pierwsze, a zatem, że taka linja zadosyć uczyni tylko warunkom stykania się 1-go stopnia, a jej zrównanie, wypadając z kombinacji wspomnianych dwóch warunków $f(x, a, b) = Fx$ i $f'(x, a, b) = F'x$, czyli (ponieważ ogólny kształt zrównania $y = f(x, a, b)$ może być $y = ax + b$) z warunków

$$y = ax + b = Fx, \qquad F'x = y' = a,$$

będące pod kształtem

$$y = xy' + bx,$$

okazując, że y' jest styczną linji, która czyni zadosyć warunkom stykania się pierwszego stopnia. Gdybyśmy wzięli $fx = f(x, a, b, c) = y$, spostrzeglibyśmy, że tego rodzaju linja mogłaby zadosyć uczynić warunkom stykania się stopnia 2-go i t. p.

Zważmyż teraz, jak Lagrange wywodzi teorję kwadrowania linij krzywych. Każda przestrzeń zawarta osią ucinków, linją krzywą, której zrównanie jest np. $y = fx$, i jedną jej przystawą, zawsze może się wyrazić przez Fx. Za powiększeniem się ucinka x przyrostkiem i, $F(x + i) = Fx$ będzie przyrostkiem powierzchni, który na każdą wartość ilości i zawsze powinien być większym od prostokąta weń wpisanego $i\, f\, x$, a mniejszym od opisanego na nim $i\, f(x + i)$. Że zaś na każdą wartość ilości i zawsze różnica między tym przyrostkiem a jednym z prostokątów musi być mniejszą od różnicy między samemi prostokątami, więc z natury rzeczy wypada główny warunek, że

$$i\, f(x + i) - i\, fx > F(x + i) - F(x) - i f(x),$$

czyli

$$i\, f'(x + j) > F'(x - fx) + \frac{i}{2} F''(x + j).$$

Lecz widzimy, że ten warunek nie ziści się, dopóki $F'x - fx$ nie będzie $= 0$, gdyż inaczej zawsze i moglibyśmy wziąć tak małem, że przeciwnie byłoby $F'x - fx + \frac{1}{2} F''(x + j) > i\, f'(x + j)$;

dosyć byłoby wziąć i mniejsze od $\dfrac{F'x - f'x}{f'(x+j) - \frac{1}{2}F''(x+j)}$,

aby już nie poprzedni ale ten ostatni warunek był dopełnionym Musi więc być koniecznie $F'x - fx = 0$ czyli $F'x = fx$

Z danego zatem zrównania na linję, chcąc wynaleść jej kwadraturę, dosyć jest wziąć funkcję pierwotną funkcji, będącej wartością przystawy.

W wyprowadzeniu głównej zasady, na której się wspiera zastosowanie teorji funkcyj w Mechanice, Lagrange tak rozumuje. Na jakimkolwiek bądź gatunku ruchu zawsze położenie punktu w przestrzeni zależy od współuszykowanych x, y, z i od czasu t. W ruchu więc prostokreślnym przestrzeń ubiegana x będzie $= ft$.

Najprostszy kształt tej funkcji jest at, a że z równania $x = at$ wnosimy, że ruch odbywa się po linji prostej, że drogi są w stosunku prostym czasów, a zatem że to jest ruch jednostajny, współczynnik zaś $a = \frac{x}{t}$ jest jego prędkością.

Najprostszy kształt jaki ft, oprócz at, przybrać może, jest bt^2, zrównanie zaś $x = bt^2$ wskazuje, że w tym gatunku ruchu drogi mają się jak kwadraty z czasów, a zatem że drogi w daleko większym powiększają się stosunku aniżeli czasy, czyli że to jest ruch jednostajnie przyśpieszony, a jego chyżością — siłą jest b.

Kiedy zechcemy śledzić dalsze kształty funkcji ft, natrafimy na gatunki ruchu, które się nigdy w naturze nie jawią, a zatem które nie mogą być przedmiotem naszej uwagi. Jeden jeszcze nietylko ruch składany z dwóch poprzednich, to jest $x = at + bt^2$, jawia się nam dosyć często i jest wypadkiem dwóch ruchów cząstkowych jednostajnego at i jednostajnie przyśpieszonego bt^2.

Z ogólnego więc wyrażenia $x = ft$, skoro t powiększy się chwilą θ, otrzymamy na przestrzeń ubieżoną w chwili θ wartość

$$\theta f't + \frac{\theta^2}{2} f''t + \frac{\theta^3}{2.3} f'''t + \ldots,$$

gdzie t czas ubieżony przed chwilą θ jest uważanym za ilość stateczną. Ruch, jakim ta przestrzeń została ubieżoną, będzie złożonym

z rozmaitych cząstkowych ruchów, którym odpowiadające przestrzenie w czasie: θ będą: $\theta f' t, \frac{\theta^2}{2} f'' t, \frac{\theta^3}{2.3} f''' t \ldots$ Z tego więc, cośmy wyżej powiedzieli, okazuje się, że pierwszy z tych cząstkowych ruchów jest jednostajnym, a jego chyżością jest $f' t$, drugi jest jednostajnie przyśpieszonym, a jego przyśpieszającą siłą jest $f'' t$. Resztę ruchów cząstkowych Lagrange usuwa z pod uwagi i usiłuje dowieść, że kiedy idzie o oznaczenie ruchu na początku czasu θ, ta reszta ruchów cząstkowych może się wyrzucić z rachunku. Na tem więc koniec wyraziwszy $f(t + \theta)$ przez $f(t) + \theta f' t + \frac{\theta^2}{2} f'' t + \frac{\theta^3}{2.3} f''' (t + \lambda \theta)$, [1]) wnosi, iż w wyrazie $\frac{\theta^3}{2.3} f''' (t + \lambda \theta)$ mogą się zawrzeć wszystkie ruchy cząstkowe, stanowiące różnicę między całkowitym ruchem ciała a ruchem złożonym z dwóch tylko cząstkowych: jednostajnego i jednostajnie przyśpieszonego. Ten zaś wyraz z przyczyny θ możemy zrobić tak małym, jak sami chcemy, więc i ruch, wyrażony przez $\theta f' t + \frac{\theta^2}{2} f'' (t)$, bliżej może przystąpić do całkowitego ruchu ciała aniżeli jakikolwiek bądź inny, złożony z jednostajnego i jednostajnie przyśpieszonego. Wyraziwszy bowiem jakikolwiek tego rodzaju ruch przez $a\theta + b\theta^2$, różnica między nim a całkowitym ruchem będzie

$$\theta (f' t - a) + \theta^2 (\frac{1}{2} f'' t - b) + \frac{\theta^3}{2.3} f''' (t + \lambda \theta),$$

która na pewną wartość ilości θ może się stać większą od $\frac{\theta^3}{2.3} f''' (t + \lambda \theta)$, byleby a i b nie były tem samem co $f' t$, $f'' t$.

Przychodzimy więc do wniosku, że $\theta f' t$ wszystko w sobie zawiera, co tylko jest jednostajnego, w całkowitym ruchu zaś $\frac{\theta^2}{2} f''' t$ to wszystko, co w nim jest jednostajnie przyśpieszonego, a z kom-

---

[1]) λ jest współczynnikiem nieznanym, zawartym między granicami 0 i 1.

binacji rozmaitego natężenia, kierunku i trwania obu tych ruchów powstaje tyle odmiennych rodzajów ruchu. W każdym zaś razie funkcja pochodna pierwsza funkcji czasu, będącej wartością przestrzeni w zrównaniu ruchu, jest siła ruchu jednostajnego, a zaś funkcja pochodna druga jest siłą ruchu jednostajnie przyśpieszonego.

Z tych to ogólnych wyobrażeń, stanowiących zasadę nauki ruchu Lagrange'a, wynikają dalsze wnioski, prowadzące do rozwiązywania rozmaitych zagadnień, do wyprowadzenia dalszych teoryj w Matematyce.

II.

1. Wszystkie metody redukują się do trzech główniejszych.

Rzuciwszy okiem na wyłożone tu zasady rozmaitych metodów, spostrzegamy, iż wszystkie, jakkolwiek zrazu okazują pewną rozmaitość, w istocie zmierzają do jednakowego celu, do jednakowych wypadków, i—jak mówi p. Carnot—wszystkie niczem innem nie są tylko metodem wyczerpania, mniej więcej szczęśliwie przekształconym stosownie do potrzeb rachunku, uproszczonym i przyprowadzonym do pewnego stałego algorytmu. We wszystkich deje się widzieć ten główny charakter Rachunku wyższego, że w nim funkcje uważają się w swym wzroście lub ubywaniu. Takowy zaś sposób uważania stąd wypływa, iż dla łatwiejszego wynalezienia szukanych stosunków zastanawiamy się w Rachunku wyższym nad funkcjami nie tak, jak się one nam zwyczajnie jawią, lecz jakim sposobem te funkcje częstokroć zanadto skomplikowane powstają z innych prościejszych, z innych, które, uważane niejako za elementa, łatwiejszemi są do rozważenia.

Z takowego sposobu uważania wynikają rozmaite przyrostki: 1) ilości zmiennych pojedyńczych z przyczyny, których funkcje odmieniają się; 2) samychże funkcyj. Te przyrostki albo pojedyńczo uważane stają się przedmiotem Analizy, jak np. w metodzie Leibniza, Eulera, albo też ich nieoznaczone wielkości biorą się zawsze względnie do innych, a przedmiotem Rachunku są między niemi zachodzące stosunki, jak w metodach Newtona, Landena, Lagrange'a i innych. W tych zaś ostatnich albo do wy-

tłumaczenia natury stosunków wchodzą wyobrażenia granic, albo też te stosunki ogólnie uważają się pod postacią funkcyj, które pewnym oznaczonym sposobem z danych funkcyj powstają. Wszystkie więc metody do trzech głównie zredukować możemy, to jest: 1) ilości infinitezymalnych; 2) granic; 3) funkcyj analitycznych.

2. Uwagi nad pierwszym.

Zastanawiając się nad pierwszym, uderza nas nadzwyczajna łatwość i krótkość w najtrudniejszych wywodach, lecz, jakeśmy mówili, razem jawią się nam wyobrażenia ilości nieskończonych, trudne do pojęcia i wprowadzające pewną nieścisłość do rozumowań. Sposób, jaki się tam zwyczajnie używa do wyrzucania tych ilości z ostatecznych wypadków rachunku, wprawia nas w podejrzenie, iż rachunek nasz nie jest dokładnym, tylko przybliżonym do prawdy.

Dwie zatem są trudności, którebyśmy wprzódy rozwiązać musieli, niżbyśmy się przychylili do metodu nieskończoności: 1) co to są te ilości?; 2) czy w tym metodzie rachunek jest dokładnym, czy tylko przybliżonym do prawdy?

Trudności te dwojako się wyjaśniają, albo sposobem Leibniza, który tym ilościom przyznaje pewną niedeterminowaną wartość, albo sposobem Eulera, który je uważa za ilości niknące. W obu razach metafizyka metodu nieskończoności, o ile można, najdokładniej została wyjaśniona przez p. Carnota [1])

Według niego cała tajemnica Analizy zależy na schwyceniu rozmaitego stopnia nieoznaczności, jaka tylko ilościom może być właściwą. Wszystkie sposoby rachowania różnią się tylko między sobą rozmaitego stopnia ilościami nieoznaczonemi, które w nich są głównie na celu. W takowem to stopniowaniu następny może się ułożyć szereg: liczby mianowane, po nich ogólne, następnie ilości algebraiczne stateczne, zmienne, a nakoniec infinitezymalne. Pierwszym więc charakterem tych ostatnich ilości jest właściwy im stopień nieoznaczoności, zasadzający się na tem, iż im możemy dowolnie tak małą wartość nadać, jak sami chcemy, bynajmniej nie mając

[1]) Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal par L. Carnot, (Paris 1813).

potrzeby razem odmieniać wartości ilości, między któremi związku szukamy. Lecz lepiej się natura tych ilości da poznać i razem wyjaśnia się druga trudność, skoro pójdziemy do źródła, w którem się te ilości tworzą.

Wiemy już, że trudność, zachodząca w wynalezieniu pewnego stosunku między danemi ilościami, zniewala nas do użycia pewnych ilości, nie należących do żadnej z danych, lecz mających z niektóremi z nich przynajmniej pewien oznaczony związek, a przez to służących niejako za pośrednictwo między niemi. Tym sposobem tworzą się dwa układy ilości: jeden stateczny, złożony z ilości danych, drugi pomocniczy, do którego wchodzą same tylko pomocnicze ilości. Ze zbliżania do siebie takowych układów przychodzi się do wynalezienia wyrażeń, zawierających w sobie związek razem pomiędzy ilościami danemi i pomocniczemi, z których to wyrażeń w końcu musimy zawsze wyeliminować ilości pomocnicze dla otrzymania tylko związku między samemi danemi ilościami. Skoro więc między takowemi ilościami pomocniczemi znajdą się takie, którym możemy nadać wartość mniejszą od jakiejkolwiek danej ilości, wówczas wpadniemy na bardzo łatwy sposób ich eliminowania i otrzymywania szukanych związków, który dał początek Analizie ilości infinitezymalnych.

Ten zaś sposób eliminowania wypływa z natury samychże ilości nieskończenie małych. Jeślibyśmy albowiem w ciągu rachunku napotkali na ilość skończoną dodaną do nieskończenie małej, wówczas pomnąc, że ponieważ ta ilość skończona wraz z nieskończenie małą różni się od samej tylko ilości skończonej tak małą ilością, jak sami chcemy, wnieść będziemy mogli, że jeślibyśmy zamiast ilości skończonej wraz z nieskończenie małą wzięli samą tylko skończoną, błąd byśmy popełnili mniejszy od jakiejkolwiek mogącej się pomyśleć ilości. Że zaś rzeczywiście w tem żadnego nie popełnimy błędu, dowodzi nam zgodność wypadków tego metodu z wypadkami najdokładniejszych metodów, powtóre odkryte źródło, skąd pochodzi całkowite zniszczenie chociażby najmniejszego stąd mogącego wyniknąć błędu.

Zastanawiając się albowiem nad rozwiązywaniem rozmaitych zagadnień sposobem Leibniza, spostrzegamy, że według niego

zawsze zaczynamy w przyjęciu pewnego fałszywego przypuszczenia, które musi za sobą ciągnąć wnioski mniej lub więcej niedokładne. Że zaś po ostatecznem wykasowaniu ilości nieskończenie małych wypadki takowych wniosków są dokładne, musiał błąd, powstający z wykasowania tych ilości, wpłynąć na zniszczenie błędu, wynikającego z fałszywego przypuszczenia, a z wzajemnego niszczenia się błędów musiała powstać prawdziwa dokładność rachunków. Jakoż Leibniz zawsze przypuszcza, że linje krzywe są wielokątami. Z tego przypuszczenia wynika, że do rachunku wchodzą ilości, których wielkość zalezy od wielkości i względnego położenia boków składających linję krzywą. Mogąż takowe wnioski w rachunku zachować prawdziwą dokładność, dopóki nowe jakieś przypuszczenia nie wpłyną na uważanie linij krzywych nie za wielokąty, ale za linje krzywe właściwie wzięte? Te zaś przypuszczenia mogąż być inne oprócz tych, któreby uważały boki wielokątów albo też wielkości, od których wielkość tych boków zależy, za tak małe, iżby względnie do innych skończonych wielkości mogły być z rachunku wyrzucone? Widzimy więc, że wyrzucenie z ostatecznych wypadków rachunku ilości nieskończenie małych nie tylko że nie narusza dokładności rachunku, ale nadto koniecznie i nieodbicie jest potrzebnem do jej zachowania. Cała zaś tak nazwana metafizyka metodu infinitezymalnego zasadza się na wzajemnem niszczeniu się błędów.

To jeszcze spostrzegamy, że, czy my z Leibnizem uważać będziemy ilości nieskończenie małe za rzeczywiste ilości, czy z Eulerem za zera, wszystko to na jedno wyjdzie, z tą tylko chyba różnicą, że w pierwszym razie wyrzucimy je wprost dlatego, że one nam dokładność rachunku psują, że one rzeczywiście w naturze wielkości, do których się odnoszą, bytu mieć nie powinny; w drugim zaś razie, że kiedy my od uważania wielokątów przychodzimy do uważania linij krzywych i do nich chcemy ostateczne wypadki rachunku stosować, musimy boki wielokątów uważać niejako za punkta, a zatem ilości, których wartość zależy od wielkości tychże boków, musimy uważać za zera. W obu zaś razach prawdziwa metafizyka metodu zarówno dokładnie może być wyjaśniona. Lecz Carnot przyznaje pierwszeństwo pierwszemu sposobowi uważania, kładąc

za główną temu przyczynę, iż wyobraźnia nasza bardziej się przechyla do metodu, którego przedmiotem są ilości rzeczywiste, niż do wielkości, który je uważa za zera.

Ten jednak powód, który zniewolił p. Carnot do przyznania wyższości sposobowi uważania Leibniza, nie zupełnie, zdaje mi się, jest dostatecznym. Tym sposobem albowiem, robiąc ulgę naszej imaginacji, możemy wpaść w dalsze nieprzyzwoitości, z którychby inne zarzuty przeciwko temu metodowi łatwo powstały. Moglibyśmy albowiem sądzić, że wartość, jaka im się nadaje we współczynniku różniczkowym, wynika ze stosunku, zachodzącego między ich rzeczywistemi wielkościami, w czembyśmy widoczny błąd popełnili. Oprócz tego, jakkolwiek te ilości uważać będziemy, zawsze w Analizie, w wyrażeniach analitycznych musimy je uważać za zera, gdyż z niemi tak jak z zerami postępujemy. Pozostaje więc nam jeszcze wyjaśnić dwie rzeczy: 1) jak jedne i te same ilości raz mogą się uważać za prawdziwe zera, drugi raz za ilości rzeczywiste, na czem teorja rozmaitego porządku ilości nieskończonych zasadza się; 2) naturę wartości, które się różniczkom we współczynnikach różniczkowych czyli w granicach stosunku między przyrostkami przyznają. Te dwie trudności nie są, zdaje mi się, przez p. Carnot wyjaśnione. Przystąpmy więc tymczasem do rozważania dwóch innych głównych metodów.

3. Uwagi nad drugim i porównanie go z poprzednim.

W metodzie granic głównym przedmiotem rachunku są układy ilości danych, uważane za granice, do których się układy pomocnicze zbliżają o ilości nieskończenie małe. Jednakże ponieważ, jak sam d'Alembert twierdzi, właściwy metod granic zależy zawsze na wynalezieniu dwóch granic jednej i tej samej ilości i na zrównaniu z sobą tychże granic, więc do pojęcia, na czem zasadza się dokładność tego metodu, musimy się dobrze przekonać, że dwie granice jednej ilości są sobie równe. Do przekonania się zaś o rzeczywistości tego twierdzenia musimy przypuścić, że ilość nieskończenie mała nie może ani powiększyć ani zmniejszyć ilości skończonej. Albowiem jak każda z granic różni się od ilości, która

się do niej zbliża, nieskończenie małą ilością, tak też i same granice między sobą mogą się różnić ilością nieskończoną.

Dokładność zatem zasady tego metodu będzie się zasadzać na metafizyce metodu nieskończoności. Prawdziwa zaś różnica między dwoma temi metodami zapewne nie inna będzie, tylko że w ostatnim same jedynie granice, w których się zawiera zawsze związek ilości danych, są przedmiotem szczególnej uwagi rachunku; w poprzednim zaś, oprócz nich, wchodzą jeszcze do rozumowania związki między ilościami pomocniczemi, jako też różnice między niemi i ich granicami. W ostatnim więc inny jeszcze rodzaj ilości wchodzi do rachunku, a tym sposobem nadaje się metodowi większą rozmaitość w wyrażeniach i przekształceniach algebraicznych. Widocznie się to okazuje, gdy idziemy do zastosowań Rachunku wyższego do Geometrji i Mechaniki. Ta krótkość i łatwość wywodów, do których się metod Leibniza stosuje, jest powodem, że po największej części metod ten w zastosowaniach Rachunku jest prawie powszechnie użytym. Sama nawet uwaga, że wyobrażenie granicy nie jest pewniejszem od wyobrażenia ilości nieskończenie małych, że metafizyka metodu granic wspiera się na dokładności metodu infinitezymalnego, może nas doprowadzić do wniosku, że do zupełnego wytłumaczenia zasad Rachunku wyższego, aby się w nim zbliżyć do największej, jaka być może, oczywistości, raczej teorji Leibniza, niż teorji granic, chwycić się nam wypadnie.

4. Uwagi nad trzecim i porównanie go z poprzednim.

Pozostaje nam jeszcze do uważania jeden sposób tłumaczenia zasad Rachunku wyższego, w którym zamiast wyobrażenia granic użyte są ogólne wyobrażenia funkcyj pochodnych, w którym, jakeśmy widzieli, tak wielka oryginalność, prostota i prawdziwie matematyczna ścisłość zawiera się. Porównywając go z poprzednim, zastanawia nas różnica, która się tak w rozmaitego rodzaju wywodach daje spostrzegać. W wykładzie mianowicie samej teorji nie widzimy nawet pozoru, z któregobyśmy się mogli domyślać, że do dokładnego wytłumaczenia zasad Rachunku potrzebnem jest użycie ilości nieskończenie małych; wszędzie daje się widzieć charakter właściwy czystej Analizie algebraicznej.

Lecz szukając przyczyny takowej wyższości, takowej różnicy między metodami, znajdziemy ją, zdaje mi się, w dwojakim sposobie uważania głównych warunków, jakim metod użyty do wykładu Rachunku wyższego ma zadosyć uczynić.

L a g r a n g e, zważając, iż cała teorja zastosowania Rachunku wyższego zależy tylko od wynalezienia wartości lub znaku pierwszego terminu rozwinienia przyrostku funkcji, wnosi, iż do wywiedzenia teorji i zastosowań Rachunku wyższego niepotrzebnym jest rozbiór natury tych pierwszych terminów, zastanawianie się nad niemi osobno, niezależnie od źródła, z którego powstają, lecz tylko rozbiór natury szeregów, prowadzących do wywiedzenia wartości wspomnianych terminów z każdej danej funkcji. Te więc pierwsze terminy są u niego wyrażeniami algebraicznemi, sposoby na ich wyprowadzenie wzięte są z Algebry, i cały rachunek ma postać algebraiczną.

L e i b n i z zaś i inni tę samą rzecz inaczej uważali. U nich, ponieważ cała teorja i jej zastosowania zależą od pierwszego terminu rozwinienia, więc dla poznania istoty Rachunku należy dokładnie zważyć naturę tych ilości, niezależne od rozwinień, z których w Analizie powstają. Należy je rozważyć w samych sobie, tak jak one bezpośrednio z natury geometrycznych wielkości wynikają, i z poznania tym sposobem ich własności wyprowadzić całą teorję i zastosowania Rachunku.

U L a g r a n g e'a więc ogólny kształt rozwinienia funkcji, będąc zasadą Rachunku, jest razem źródłem, z którego te główne terminy wynikają, a zatem, według niego, w rozwiązywaniu pytań musimy przechodzić wprzódy do szeregów, a od szeregów do użycia samych funkcyj pochodnych. U L e i b n i z a zaś i innych wartość i użycie tych terminów wynika bezpośrednio z rozbioru warunków pytań, z rozważania związków między wielkościami. W obu więc razach też same ilości muszą się pod zupełnie różnemi ukazywać postaciami, lecz w drugim razie musi być daleko szczegółowiej wskazaną droga, jaką przychodzimy do ich wynalezienia, i oprócz tego rozmaite własności, z których wprost przychodzimy do sposobów rozwiązywania wielu zagadnień.

Z tak odmiennych sposobów uważania wynika, że tego ostatniego rodzaju metody muszą być łatwiejsze w zastosowaniach i lepiej dające poznać metafizykę Rachunku, w metodzie zaś Lagrange'a sposoby prawdziwie algebraiczne muszą wskazywać w wykładzie wyższość nad pierwszemi, skoro dawać będziemy wzgląd na dokładność wyrażeń, ogólność i prostotę. Lecz za nadto ogólne uważanie wspomnianych terminów rozwinienia musi za sobą ciągnąć niektóre nieprzyzwoitości, któreby wpływały na rozmaitość sposobów i łatwość ich stosowania.

5. Nieprzyzwoitości metody Lagrange'a.

Jakoż to mogło być naprzód główną przyczyną wprowadzenia tak nieprzyzwoitego algorytmu, który z dwóch miar ustąpić musi znakowaniu Leibniza: 1) zależąc na liczbie i położeniu kresek, jest zanadto zawiłym, niewygodnym w użyciu i prawie niewystarczającym wówczas, kiedy idzie o wynalezienie funkcyj pochodnych co do wielu ilości zmiennych; 2) że algorytm Leibniza nietylko źródło, skąd powstają, lecz nawet sposób, jakim się tworzą stosunki między różniczkami, wskazać jest zdolnym, czego w znakowaniu Lagrange'a braknie. Nadto wprowadzenie znaku całkowania u Leibniza znacznie przyczynia się do doskonałości tego języka, który w swych wyrażeniach zawsze jak najwięcej musi oznaczyć względów.

Oprócz zaś znakowania, dalsze mniej widoczne nieprzyzwoitości dają się spostrzegać wówczas, kiedy idziemy do rozbioru głównych zastosowań Rachunku wyższego.

Tam główną zasadą wszystkich wywodów jest twierdzenie, że w rozwinieniu każdy wyraz może się stać z przyczyny nieoznaczonego przyrostku ilości zmiennej większym od sumy wszystkich po nim następujących wyrazów. Twierdzenie to, mogące się dokładnie dowieść, może być uważanem za prawdziwie dokładną zasadę wówczas, kiedy w rachunku służy tylko do okazania, że wartość i znak szeregu głównie zależy od jego poprzednich wyrazów, jak tego mamy przykłady w teorji największych i najmniejszych wartości, w teorji stykań się i t. d. Lecz kiedy naprzykład wybierzemy

wywód Lagrange'a na okazanie, czem są w Mechanice funkcje pochodne 1-go i 2-go porządku, spostrzeżemy już wielką nieścisłość i niedokładność rozumowania. Nie przestaje albowiem Lagrange na dowiedzeniu, że w szeregu

$$\theta f' t + \frac{\theta^2}{2} f'' t + \frac{\theta^3}{2 . 3} f''' (t + \lambda \theta)$$

suma dwóch poprzednich wyrazów może być większą od trzeciego t. j. sumy dalszych wyrazów rozwinienia, lecz dalej posuwając swoje rozumowania, wnosi, że wyraz $\frac{\theta}{2 . 3} f''' (t + \lambda \theta)$ może się wyrzucić z rachunku. Wyraźnie więc tu Lagrange wpada na konieczność użycia wyobrażeń właściwych metodowi Leibniza, co się lepiej jeszcze daje widzieć w miejscu przytoczonem przez p. Carnot z Mechaniki analitycznej Lagrange'a, w którem się wywodzi zasada chyżości wirtualnych.

6. Zaradzenie tym nieprzyzwoitościom.

W rzeczy samej takowe nieprzyzwoitości znacznie wpływać mogą na prostotę i dokładność wyrażeń w zastosowaniach mianowicie Rachunku; wykład albowiem samej teorji zawsze wskazuje pewną wyższość nad wszystkiemi dotąd znajomemi metodami. Źródłem zaś takowych nieprzyzwoitości nic innego, zdaje mi się, jest tylko, że Lagrange, dając wzgląd na same wartości funkcyj pochodnych, wszystko odrzuca, coby szczegółowiej nieco wyjaśniło ich naturę i sposób, jakim się one bezpośrednio w naturze samychże geometrycznych figur tworzą. Gdybyśmy więc jak najprostszą drogą mogli zaradzić tej nieprzyzwoitości metodu, wpadlibyśmy zapewne najprzód na daleko właściwsze znakowanie; powtóre myśl nasza, wzbogacona daleko większą rozmaitością wyrażeń i sposobów dochodzenia prawdy, byłaby zdolniejszą i obfitszą w zastosowania.

Zdaje się więc wnosić wypada, że chociaż czysty metod funkcyj niezupełnie nas zadowalnia, jednakże wsparty innym metodem, któryby najprościej doprowadził do wskazania przyzwoitego algo-

[1]) Carnot, Réflexions etc. Chap. III, p. 212.

rytmu i ułatwienia zastosowań, mógłby zadosyć uczynić warunkom najdoskonalszego metodu. Z tego zaś, cośmy dotąd powiedzieli, wnosimy, iż tym pomocniczym metodem chyba jeden infinitezymalny być może.

Lecz ponieważ, jakeśmy mówili w wykładzie samej teorji, samego tylko znakowania brakuje, a prawdziwa potrzeba pomocy innego metodu zaledwo w zastosowaniach czuć się daje, więc skorobyśmy pewnym algebraicznym sposobem mogli w teorji funkcyj zaprowadzić algorytm Leibniza, jej wykład byłby już uzupełnionym. Ten zaś algorytm zapewne nie skądinąd może być wyprowadzonym, tylko z tej głównej zasady, z której się cała teorja wywodzi, t. j. z szeregu

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{1.2} f''x + \frac{i^3}{1.2.3} f''' + \ldots$$

Szereg ten albowiem mógłby się przekształcić następnie:

$$f'x = \frac{f(x+i) - fx}{i} - \frac{i}{2} f'' - \frac{i^2}{2.3} f'''x \ldots,$$

skąd łatwo wnieść możemy, że, ponieważ w $f'x$ nie zawiera się ilość niedeterminowana i, więc i w wartości na $f'x$, to jest w drugiej stronie równania, ilość ta miejsca mieć nie może, a zatem wszystkie wyrazy mnożone przez i muszą zaraz być równe zeru, a wartość $f'x$ musi zależeć od wartości tylko ułamka $\frac{f(x+i) - fx}{i}$; inaczej albowiem ilość oznaczona, mająca pewną swą wartość daną z natury funkcji fx, byłaby wyrażona przez ilość nieoznaczoną, która się może stać lub małą, jak sami chcemy. Łatwo zaś już stosunek $\frac{f(x+i) - fx}{i}$ dałby się wyrazić przez $\frac{\text{differentiale fonction } fx}{\text{differentiale } x}$ $= \frac{d\,fx}{d\,a}$, a stąd $f''x$ przez $\frac{d^2 fx}{d\,x^2}$, i tak następnie.

Tym więc lub temu podobnym sposobem wyprowadziwszy użycie algorytmu Leibniza, ciąglebyśmy postępowali drogą, jaką nam Lagrange wskazał. Poszlibyśmy tym razem w części

za p. Lacroix, w części za p. Garnier, który się wiernym komentatorem dzieł Lagrange'a nazwać może [1]).

Zgłębiwszy już w takowym wykładzie prawdziwą istotę teorji Rachunku wyższego, nim pójdziemy do zastosowań tego Rachunku, musimy wprzódy poznać dokładnie metod nieskończoności, czem są w niem funkcje pochodne, co znaczą tak nazwane różniczki, i jak się tego rodzaju ilości bezpośrednio w rozbiorze rozmaitego rodzaju wielkości dają spostrzegać. W dalszym więc ciągu nauki każdy wywód Lagrange'a musi być wyjaśniony metodem Leibniza, w każdym punkcie musimy się spotykać z teorją nieskończoności, która nam wskaże prawdziwą metafizykę Rachunku wyższego, wzbogaci nas wielką rozmaitością sposobów i ułatwi nam zastosowania tejże Analizy.

7. Uzupełnienie metodu nieskończoności.

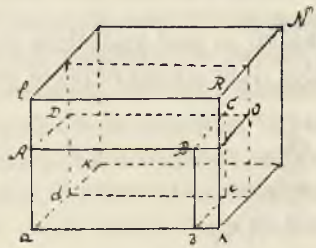
Jednakże widzieliśmy, że metod ilości nieskończonych, aby nas doprowadził do największej, jaka być może, oczywistości, potrzebuje jeszcze wyjaśnienia dwóch głównych trudności: mianowicie jak ilości uważane względnie do innych mogą się brać raz za rzeczywiste ilości, drugi raz za prawdziwe zera. W części przynajmniej mogłaby, zdaje mi się, w tem dopomóc teorja p. Fischera, ściągająca się głównie do wskazania, czem są w Geometrji różniczki i jak się one tworzą w rozmaitego rodzaju geometrycznych figurach [2]).

Przychodzimy do wyprowadzenia tej teorji, odbywając na samychże wielkościach działania, jakie odbywamy z wyrażeniami algebraicznemi, kiedy nam chodzi o wynalezienie różniczek. Tak np. chcąc wynaleść różniczkę bryły o trzech wymiarach $ab = x$, $ad = y$, $aA = z$, powiększyć nam wypada wymiary ab, ad, aA jako ilości odmienne, nieoznaczonemi przyrostkami bh, dk, Al i od tak powiększonej bryły Bk odjąć poprzednią Ac. Otrzymamy wówczas sumę trzech bryłek $Ob + Nk + Ol$. Pozostaje nam nakoniec przyrostki zamienić na ilości nieskończenie, małe czyli

[1]) J. E. Garnier Leçons du calcul différentiel, Paris 1814.

[2]) Untersuchung über den eigentlichen Sinn der höheren Analysis von E. G. Fischer, Berlin 1808.

na takie, które względnie uważane do ilości skończonych x, y, z mogą się brać za zera. Powinniśmy więc w każdej z tych bryłek jeden ze trzech wymiarów tak małym uczynić, aby, względnie do dwóch drugich, był, ściśle mówiąc, zerem, a zatem przyprowadzić go do wielkości punktu. W takim zaś razie suma trzech bryłek zamieni się na sumę trzech powierzchni $Bc + Dc + DB$, z których każda jest rozmnożoną przez trzeci wymiar, wzięty w ostatecznym kresie swego niknienia, i takowe to powierzchnie ze względu na punkt stateczny a mogą się nazwać krańcowemi granicami (Endgränze)[1]) bryły. Jeżeli różnicując analityczne wyrażenia bryły xyz, wpadamy na różniczkę $xydz + xzdy + zydx$, złożoną z trzech takich wyrazów, z których każdy może uważać się za powierzchnię mnożoną przez trzeci wymiar, zamieniony na ilość nieskończenie małą. Możemy więc powiedzieć z dokładnością, że



Rys. 2.

$$d.AC = Cd + Bc + CA = xydz + xzdy + zydx.$$

Podobnież Fischer przychodzi do wniosku, że różniczką powierzchni jest linja, która względnie do punktu lub linji, skąd powierzchnia bieg swój zaczyna, może się nazwać końcową granicą powierzchni. Nakoniec różniczką linji jest ostatni punkt l, będący granicą jej biegu. Stąd wnosi, że różniczką każdej geometrycznej figury jest jej końcowa granica w Analizie wyrażone pod kształtem funkcji o tyluż wymiarach co i sama pierwotna funkcja z tą różnicą, że w pochodnej jeden z wymiarów jest ilością nieskończenie małą, a zatem uważany względnie do innych wymiarów jest zerem.

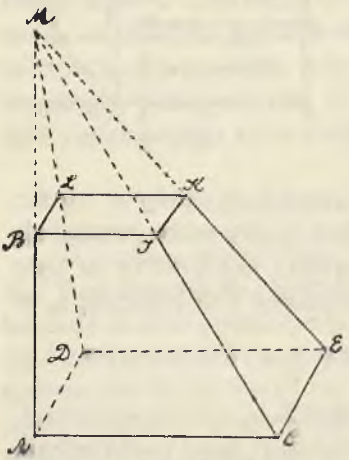
Mając zatem wynaleść różniczkę piramidy czworościennej ściętej $ACDEBJKL$, gdzie podstawa $AE = b$, wysokość $AM = a$ są ilościami statecznemi, a zaś wysokość $AB = x$ jest

[1]) Wyraz granica nie bierze się bynajmniej tu w znaczeniu takiem, w jakiem go używa d'Alembert, lecz tylko oznacza powierzchnię, linję lub punkt, jakiemi wielkości są ograniczone.

zmienna, możemy naprzód szukać końcowej granicy, którą w tym razie będzie powierzchnia BK, a wynalazłszy jej analityczne wyrażenie z proporcji

$$a^2 : (a - x)^2 = b : BK, \quad BK = \frac{(a - x)^2}{a^2} b,$$

okazać je pod kształtem wyrażenia na bryłę, mającą za jeden wymiar ilość nieskończenie małą. Takowym u nas wymiarem będzie przyrostek wysokości zmiennej x, t. j. dx, przez który rozmnożona końcowa bryły granica $= \frac{(a - x)^2}{a^2} b$ ma być różniczką piramidy ściętej. Jakoż różniczkując wprost analityczne wyrażenie piramidy czworościennej ściętej równe $\frac{1}{3} ab - \frac{1}{3} \frac{(a - x)^3}{a^2} b$, wpadniemy na zupełnie toż samo wyrażenie różniczki t. j. $\frac{(a - x)^2}{a^2} b\, dx$.



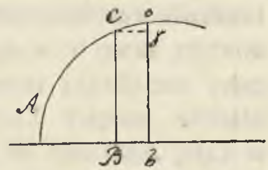
Rys. 3.

W takowej to teorji końcowych granic Fischer wskazuje, jak ilości nieskończenie małe, względnie do innych niższego porządku, bez naruszenia dokładności, mogą się brać za prawdziwe zera, te zaś same ilości, uważane względnie do innych porządku wyższego, uważają się za ilości skończone.

Lecz po wyłożeniu tych uwag trzeba było jeszcze trudniejsze rozwiązać pytania, to jest wyjaśnić naturę wartości, które nadajemy różniczkom, uważanym względnie do innych różniczek, a stąd wyjaśnić sposób tworzenia się różniczek wyższych porządków. Tu powinniśmy zrobić niejaki wybór między myślami Fischera, odrzucić zanadto metafizyczne i subtelne rozumowania, a przyjąć same tylko uwagi, wyciągnięte z natury współczynników różniczkowych.

Jakkolwiek jednakże w tym razie postępować będziemy, zawsze na wielkie wpadniemy trudności, które dotąd, zdaje mi się,

niezupełnie są jeszcze pokonane. Zawsze będziemy musieli rozróżnić dwa względy, pod któremi się różniczki w Rachunku uważają, raz kiedy się one odnoszą do ilości skończonych, z których powstały, drugi raz, kiedy dajemy wzgląd na stosunek, między niemi samemi zachodzący. Pod pierwszym uważane względem są zawsze zerami, pod drugim zaś mogą przybierać pewne oznaczone wartości. Lecz te wartości bynajmniej nie wynikają ze stosunku, zachodzącego między rozciągłościami różniczek; zważając bowiem na ich naturę, spostrzegamy, że one wynikają ze sposobu, jakim się z ilości skończonych tworzą, ze stosunku, zachodzącego między pewnemi ilościami skończonemi wówczas, kiedy się te ilości zamienią na nieskończenie małe. I tak np. niech będzie linja krzywa AC, której zrównanie $y = Fx$. Powiększywszy ucinek x przyrostkiem jakimkolwiek Δx, będziemy mieli $C\gamma = Bb = \Delta x$, a związek między przyrostkiem Δx i wynikającym stąd przyrostkiem przystawy Δy będzie $\Delta y = f(x + \Delta x) - fx$. Wyciągnięty stąd stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ będzie się zmieniał z odmianą Δx, lecz zawsze będzie miał pewną wartość, chociażby przyrostek Δx stał się odjemnym, a zatem kiedy ten przyrostek stanie się $\frac{1}{\infty}$, punkta $B = dx$, $C = dy$, uważane względnie co do swej rozciągłości, różnią się tylko między sobą miejscem położenia, lecz uważane właściwie jako różniczki, jako powstające z dwóch odmiennej wielkości linji $C\gamma$, Bb, ze stosunku zachodzącego między niemi wówczas, kiedy te linje przychodzą do wielkości punktów, takowe punkta przybierają wartości wynikające ze stosunku, w jakim się linje $C\gamma$, Bb, zmniejszały,—czyli przyznajemy im takie wartości dla wskazania, iż te punkta powstały tym a nie innym sposobem, z takich a nie innych wielkości. Ponieważ zaś tak wynaleziony stosunek między wartościami ilości dx, dy możemy wziąć za stosunek między współuszykowanemi innej linji, z którą podobnież postępując jak z poprzednią, możemy przyjść do różniczek ilości dx, dy, więc te różniczki wziąć następnie za współ-



Rys. 4.

uczykowane trzeciej i t. d. więc teorja Fischera może nas razem doprowadzić i do wyobrażenia różniczek wyższych porządków tak zupełnie, jak przychodzimy do wyobrażenia różniczki porządku pierwszego.

Trudności w pojęciu dokładnego wyobrażenia o takowych wartościach różniczek zmniejsza się nieco przez rozbiór niektórych przykładów, przytoczonych przez Fischera, i przez podaną teorję na wykreślanie różniczek rozmaitego rodzaju figur prostokreślnych. Zastanawiając się jednakże nad ostatecznemi wnioskami, do jakich nas najściślejszy rozbiór metafizyki Rachunku wyższego doprowadzić może, zawsze się przekonamy, że wiele jeszcze pozostanie nam rzeczy, którym na dostatecznej oczywistości brakuje, wiele jeszcze wyobrażeń trudnych do pojęcia, wiele wypadków trudnych do wytłumaczenia. Samo wyobrażenie rożniczki, wyobrażenie wartości, jaka się jej nadaje we współczynniku różniczkowym, samo to wzajemne niszczenie się błędów, które jest zasadą całej metafizyki metodu nieskończoności, możeż być jasno i dokładnie pojęte? Lecz na podobne tym enigmata nie trafiamyż w całej Analizie? W samej np. Algebrze trafiamy na wyrażenia odjemne, urojone, niewymierne, które zarówno trudne do pojęcia, lecz które zdają się być charakterystyczną cechą Analizy i stanowić jej wyższość nad Syntezą, które jej dostarczają tyle dokładnych i prawdziwie sztucznych sposobów rachowania [1]).

8. Wnioski ostateczne.

Z tych więc wszystkich uwag, mając wzgląd na prostotę, a przy równych trudnościach na jasność tak rozmaitych metodów, nadto na ich dostateczność w wytłumaczeniu prawdziwej metafizyki Rachunku i wskazanie jej istoty, do następnych przychodzę wniosków.

1. W wykładzie teorji Rachunku metod Lagrange'a, jako prawdziwie analityczny, uczący dokładnie rozumować i prawdziwą istotę Rachunku dający poznać, najlepiej odpowiada swemu przeznaczeniu.

---

[1]) Carnot, Réflexions etc. chap. I, p. 28.

2. Kiedy już idziemy do zastosowań Rachunku, kiedy nam idzie o łatwość, krótkość sposobów i poznanie dokładniejsze i bardziej szczegółowe natury współczynników różniczkowych, o zgłębienie metafizyki Rachunku, musimy metod Lagrange'a wesprzeć teorją nieskończoności Leibniza.

3. Nie możemy jeszcze przyjść do zupełnej oczywistości w rozbiorze metafizyki Rachunku różniczkowego i tylko się w niektórych razach do niej zbliżamy: a) wykonywając na geometrycznych figurach, jako wielkościach mogących się jedynie bezpośrednio rozważać, takie działania, jakie odbywamy na ich algebraicznych wyrażeniach w Rachunku różniczkowym; b) wzbogacając myśl naszą wywodzeniem jednych i tychże samych prawd rozmaitemi dotąd znajomemi metodami, które jako coraz odmienne względy, pod któremi się zawsze rzecz jedna uważa, znacznie wpłynąć mogą na wyjaśnienie zasad Rachunku, na zmniejszenie trudności, dających się w ich zgłębieniu napotykać.